大学基础数学自学丛书

有限数学引论

龚光鲁



上海科学技术出版社

大学基础数学自学丛书

有 限 数 学 引 论

龚 光 鲁

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 无锡县人民印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 12 字数 261,000
1982 年 11 月第 1 版 1982 年 11 月第 1 次印刷
印数 1—26,500

统一书号：13119·1002 定价：(科三) 0.95 元

序　言

我们伟大的祖国，为了尽早实现四个现代化的宏伟大业，需要造就大批又红又专的、具有高度文化修养和现代科学知识的工业大军、农业大军、科技大军、文化大军和国防大军。这是一项摆在全体人民面前的极为艰巨的任务。人才的培养，基础在教育。然而，目前我国每年只可能吸收很小一部分中学毕业生进入高等院校深造，大批已经走上或将要走上各种工作岗位的千千万万青年人，都迫切要求学习现代科学基础知识，以适应新时期的需要。所以，在办好高等院校的同时，还应尽量为那些不能升入大学或无法离职进入大学的青年提供良好的业余学习条件。为此，上海科学技术出版社编辑出版《大学基础数学自学丛书》、《大学基础物理自学丛书》和《大学基础化学自学丛书》。

《大学基础数学自学丛书》由我们负责主编，由北京大学、北京师范大学和复旦大学数学系有关教师执笔编写。包括《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《多元函数微积分》、《级数》、《空间解析几何》、《高等代数》、《复变函数论基础》、《常微分方程基础》、《概率论与数理统计基础》、《微分几何基础》、《有限数学引论》等共十一种，可供具有相当于高中文化程度、有志于自学大学数学课程的广大读者使用。

本《丛书》是一套大学基础课的自学读物，与中学程度的《数理化自学丛书》相衔接。为了使自学读者在没有教师讲课的条件下读懂、学好，其内容选取和编排不同于一般的大学课

本。文字叙述用讲课的形式书写；概念引入尽量从具体的、通俗的地方入手，逐步深入；内容安排抓住重点，讲深讲透。为了对读者解题有所启发，巩固所学的基础知识等，文中举有较多的例题；凡估计读者容易发生困难的地方，尽量给予必要的分析。习题、例题均按章分节安排，书后附有习题答案或提示。每册之首都有编者的话，指导读者自学全书。总之，想尽可能减少自学中的困难。

自学，时间总比在校学习紧得多。要自学有成就，没什么"诀窍"，如果有的话，那就是"多思考，多练习，熟能生巧"。

学习必须从自己的实际水平出发，学每本书要有一定的基础。选读顺序可根据编者的话的指导进行。有志者，事竟成。希望广大读者循序渐进、持之以恒、锲而不舍地学习。愿大家努力学好。

《丛书》编审过程中得到了北京大学数学系、北京师范大学数学系和北京师范学院数学系领导的大力支持；许多同志参加了提纲、样稿的讨论，并提供了宝贵的意见；编撰者和审稿人为《丛书》付出了辛勤的劳动，谨此一并致谢。

由于《丛书》编写和出版的时间仓促，难免有缺点和错误，希望读者不吝赐教！

江泽涵　　　　赵慈庚

于北京大学燕南园　于北京师范大学工五楼

1980年1月

编者的话

有限数学与其说是一个数学学科，还不如说是一些数学学科的总称．按其本来的含义，它只研究有限个元素的集合所涉及的数量或类似于数量的关系．有限数学包含的范围是极其广泛的，几乎很难穷尽它．

本书作为引论，主要目的是介绍一些较为常用的有限数学知识和方法．这些方法大多不太适合于列入一般的数学分析、几何或代数等教程中．因此在本书中，我们并不拘泥于有限数学的定义，以及它到底有些什么具有代表性的重要课题，而只是选取一些初浅的、但是应用范围较为普遍的课题，甚至包括，严格地说，并不属于有限数学的个别课题．具有中等数学基础的读者，可通过学习本书而掌握一些初等的数学方法，为进一步学习其他高等数学而打下一定程度的基础．

本书第一章介绍集合的概念；并在附录中介绍近一二十年来活跃于应用科学中的弗晰集（模糊集）概念；第二章介绍命题逻辑与谓词概念；第三章介绍集合上的关系、运算以及一些常见的代数系统；第四章列举一些数数问题及数数的基本方法，其中的麦比乌斯变换法是初等数论中的一个方法；第五章介绍有限图与平面图的一般概念．这些知识是在计算机科学及其它应用领域中必需的数学工具之一．其中第一章是全书的基础，其它各章除某些例题与个别定义、定理外，都可以自成系统．因此，如将与别的章节有联系的个别部分暂时略过，读者就可以从第一章跳读任何一章．

本书力求通俗易懂，在各章中都安排了丰富有趣的例题，而不需要很多准备知识，适合于具有中学数学知识的读者自学。

读者在自学过程中，应把注意点放在弄清定义与定理的含义、证明的要点与关键以及运算的要领上，要在脑中有一个清晰的“形象”．在没有弄清定义与定理的含义之前，最好不要往下读．

本书中有些标“*”号的部份，读者在初读时如果感到较难，则可以在学完这一章后，回过来补读，甚至可以略去不读，这不影响掌握全书知识的完整．

北京师范大学数学系汪培庄同志不辞辛苦审阅了本书初稿，提出了不少宝贵的意见，在此谨致谢意．

限于编者的知识水平，如有不当与不足之处，请同志们批评指正，以便改进．

龚光鲁
于北京大学数学系
1981年8月

符号说明表

$a, b, c, \cdots$	集合中的元素
$A, B, C, \cdots$	集合；矩阵；事件
$\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}, \cdots$	弗晰集
$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{G}, \cdots$	关系
$x, y, z, \cdots$	变项
$p, q, r, \cdots$	命题
$a \in A$	a 是集 A 的元素
$a \overline{\in} A$	a 不是集 A 的元素
$\emptyset$	空集
$\boldsymbol{\phi}$	空关系
$\cup$	集合的"并"；弗晰集的"并"；事件的"和"；关系的"和"
$\cap$	集合的"交"；弗晰集的"交"；事件的"积"
$\overline{A}$	集合 A 的补集；事件 A 的对立事件
$\overline{\boldsymbol{R}}$	关系 $\boldsymbol{R}$ 的"补"关系
$-$	集合的"差"；弗晰集的"差"；事件的"差"；关系的"差"
$\subset$	集合的"包含"；弗晰集的"包含"（右包含左）；事件的"蕴涵"；关系的"蕴涵"（左蕴涵右）
$=$	集合的相等；关系的相等
U	全集，论域

$A\times B, X\times Y, \cdots$ $X^n = X\times X^{n-1}$	集合的笛卡儿积
$\vee$	命题的“析取”(或),两数中较大的一个;矩阵间的一种运算
$\wedge$	命题的“合析”(且);两数中较小的一个;矩阵间的一种运算
$\sim\square$	命题的“否”(非);矩阵的一个运算
$\rightarrow$	条件(命题),定向图的顶点间的可达性
$\leftrightarrow$	双条件(命题);(无向)图的顶点间的可达性
$\sim$	图的顶点之间的连结性;代数系统间的同态
$\Rightarrow$	命题间的“蕴涵”关系
$\Leftrightarrow, \equiv$	命题间的逻辑等价关系
$\mathbf{1}$	恒真命题;元素全是 1 的矩阵
$\mathbf{0}$	恒假命题;元素全是 0 的矩阵
$F(x_1, \cdots, x_n)$	含变项 $x_1, \cdots, x_n$ 的一个谓词
$\exists$	“存在”
$\forall$	“对一切”
$\exists!$	“存在唯一的一个”
$a\boldsymbol{R}b$,	a 与 b 之间存在着 $\boldsymbol{R}$ 关系
$A_R, A_S, A_G, \cdots$	关系 $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$ 的结合矩阵;图 G 的结合矩阵
A^T	矩阵 A 的转置矩阵
$\boldsymbol{R}^{-1}$	关系 $\boldsymbol{R}$ 的逆关系
$[x]_R, [y]_R, \cdots$	等价关系 $\boldsymbol{R}$ 的等价类
$\circ$	关系或映射的复合运算;结合矩阵的一种运算
$(X, \leqslant)$	半序集×

$f, g, h, \cdots$	映射
f^{-1}	逆映射
$D(\boldsymbol{R})$	关系 $\boldsymbol{R}$ 的定义域
$W(\boldsymbol{R})$	关系 $\boldsymbol{R}$ 的值域
$f_1\|_X$	映射 f_1 在集合 X 上的限制
I_X	集合 X 上的恒同映射
$\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & n \\ i_1, & i_2, & \cdots, & i_n \end{pmatrix}$	置换
N	全体自然数
Z_p	$\{1, 2, \cdots, p\}$
$\oplus_p$	模 p 加法
$\otimes_p$	模 p 乘法
$(\bmod p)$	按模 p
$*, ◎, \odot, \cdots$	运算
$◎\times\odot$	运算的直接积
$(\times;◎)$	带有运算 ◎ 的代数系统
e_l, e_r, e	左单位元，右单位元，单位元
O_l, O_r, O	左零元，右零元，零元
$a_l^{-1}, a_r^{-1}, a^{-1}$	a 的左逆，右逆，逆元
χ_A	集合 A 的示性函数
$X/\boldsymbol{h}, X/\boldsymbol{R}$	X 按等价关系 $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{R}$ 全成的商集
$\cong$	同构
f_h, f_R	自然同态映射
H_a	陪集
$\ker(h)$	映射 h 的核
$n!$	n 阶乘$(=1\cdot2\cdot3\cdots n)$
R_n^m	n 个元素中选 m 个的可重复排列数

P_n^m	n 个元素中选 m 个的不可重复排列数
C_n^m	n 个元素中选 m 个的不可重复组合数
D_n^m	n 个元素中选 m 个的可重复组合数
$C_n^{n_1, n_2, \cdots, n_m}$	把 n 个元素分成 m 组，第 k 组有 n_k 个元素 $(k=1, 2, \cdots, m)$ 的不同分法数
$n(A)$	集合 A 的元素个数
$\left[\frac{n}{m}\right]$	分数 $\frac{n}{m}$ 的整数部分
$S_k \equiv S_k(A_1, \cdots, A_n)$	$\sum\limits_{i_1<\cdots<i_k} n(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$
$N_{(m)}(A_1, \cdots, A_n)$	属于 $A_1, \cdots, A_n$ 中 m 个的元素个数
$N_{[m]}(A_1, \cdots, A_n)$	属于 $A_1, \cdots, A_n$ 中 m 个但不属于其中任意 $m+1$ 的元素的个数
$A_{[r]}(n, m)$	把 n 个不同的球放到 m 个相异的格子中去，恰有 r 个空格的放法数
$A_{(r)}(n, m)$	在上述情况中，至少有 r 个空格的放法数
$A(n, m)$	(即 $A_{[0]}(n, m)$) $= \sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k (m-k)^n$
$A'_{[r]}(n, m)$, $A'_{(r)}(n, m)$, $A'(n, m)$	与上面类似，但 n 个球是相同的
$f_m(n)$	n 个相同的球放到 m 个相同的格子中去的不同放法数
$[m]^n$	$=m(m+1)\cdots(m+n-1)$
$(t)_n$	$=t(t-1)\cdots(t-n+1)$, $((t)_0=1)$
$s(n, k)$	第一类斯特林数：$(t)_n = \sum\limits_{k=0}^{n} s(n, k) t^k$
$S(n, k)$	第二类斯特林数：

	$t^n=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)(t)_k$
$\mu(x, y)$	麦比乌斯函数
$N(q_1, \cdots, q_m; r)$	瑞姆赛数
$[v_1, v_2]$, $\overleftrightarrow{[v_1, v_2]}$	(图的)边或双向边
$\overrightarrow{[v_1, v_2]}$	定向边
$G=\langle V, E\rangle$	图
$d^+(v)$, $d^-(v)$, $d(v)$	顶点 v 的正结合度，负结合度，结合度
$R(G)$	图 G 的贝蒂数
$\chi(G)$	图 G 的特征数
$\rho(G)$	图 G 的连通分量数
$\gamma(G)$	图 G 的着色数
$\varkappa(G)$	图 G 的连通度
$\oplus$	(初等环路的)直和运算
K_n	n 个顶点的完全图
$K_{n,m}$	顶点数分别为 n 及 m 的完全二分图
G^*	G 的补图
$G=\langle V_1, V_2; E\rangle$	二分图
$G_{u=v}$	把顶点 u 与 v 合并后的缩图
G_{u-v}	把顶点 u 与 v 连边后的扩图
$c(T)$, $c[v, u]$, $c(\gamma)$	树 T，边 $[v, u]$，路 γ 的价格

目　　录

第一章　有限集合

第二章　逻　　辑

第三章　关系、映射与运算

第四章 集合的数数问题

第五章 有限图引论

习 题 答 案

第一章

有限集合

第一节 集合的基本知识复习

在中学数学中，我们曾经遇到过“集合”这个概念．为了本书引用方便，我们在这里简要地回忆一些重要的概念．“集合”这个词可以用来表示任何一组东西，只要我们对每一个特定的东西都能确定它是否属于这个组就行．一个性质、一种分类或一种范围常常相应地规定了一个集合．

定义1 一个集合是指具有确切含义的一堆东西．这堆东西中的每一个，称为这个集合的*元素*．集合中的每两个元素都认为是不同的．

一般用大写拉丁字母表示一个集合，有时还用带下标或上标以示区别．用记号 $a\in A$、$a\overline{\in}A$ 分别表示 a 是 A 的元素和 a 不是 A 的元素．只有有限个元素的集合叫做*有限集*．“有限数学”的对象往往是某些有限集．

描写一个集合的方法有两种：一种是列举法，在一个花括号内列出这个集合的所有元素．这种方法对元素多的或规律性复杂的集合无能为力；另一种是清楚地描述这个集合的元素所具有的特性，称为特征描述法．例如

$Y=\{a|a$ 为某平面 P 上的一个矩形，a 的面积 $=1\}$

表示 Y 为平面 P 上一切具有面积为 1 的矩形所组成的集合．又如集合

$V=\{x|x$ 实数，$x^2+1=0\}$；

$V'=\{$直角三角形|直角边a、b及斜边c满足$a^2+b^2>c^2\}$都没有任何元素. 这种没有元素的集合可以认为都是一样的,称为空集. 在集合论中约定:空集只算一个,不再按其具体的来源区别它们. 空集记为$\emptyset$.

定义2 如果集合A中的元素都是集合B中的元素,则称A是B的子集,记为$A\subset B$(记号"$\subset$"是由记号"$\leqslant$"变形而来的),或说B包含A(见图1-1).

显然,对任何集合A,均有$A\subset A$,$\emptyset\subset A$.

须要注意的是:即使是同一个集合的两个子集,也未必一定可以比大小.

如果$A\subset B$,$B\subset A$,则称A与B相等,记成$A=B$.

为了对集合的运算有直观形象,我们常用平面上的一个图形内所包含的点来表示一个集合,称为集合的文氏(Venn)图.

定义3 把A、B两个集合中的元素放在一起(相同的元素只算一个),所得到的新集合叫做A与B的并集(或和集),记成$A\cup B$(或$A+B$)(见图1-2).

定义4 把A、B两个集合中共有的元素放在一起所得到的新集合叫做A与B的交集(或积集),记成$A\cap B$(或AB)(见图1-3). 若$A\cap B=\emptyset$,则称A与B不交(见图1-4).

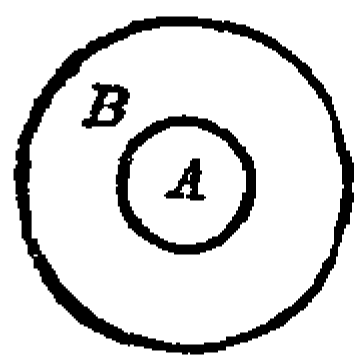


图 1-1

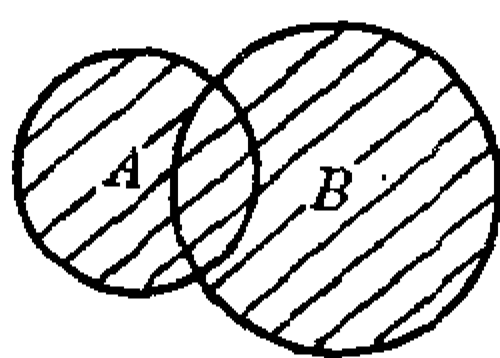


图 1-2

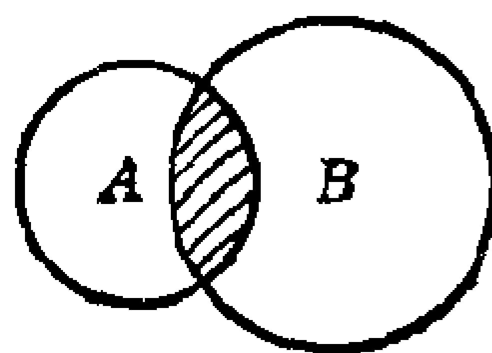


图 1-3

定义5 把A中不属于B的那些元素放在一起所得到的新集合叫做A与B的差集,记成$A-B$(或$A\backslash B$)(见图

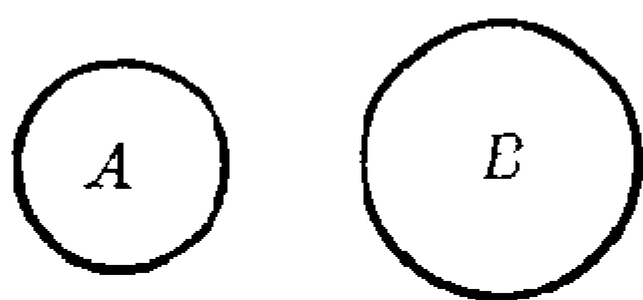


图 1-4

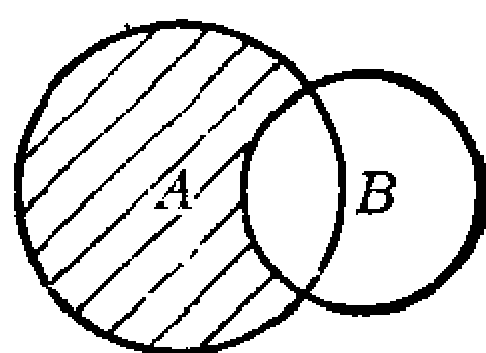


图 1-5

1-5).

我们约定：当∩、∪与−都出现时，先算∩、∪，后算−.

运算∪、∩之间满足两条分配律：

1) ∩对∪的分配律：把∪看成"加"，把∩看成"乘"，满足分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);$$

2) ∪对∩的分配律：把∩看成"加"，把∪看成"乘"，满足分配律

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

运算∪及∩分别满足交换律与结合律，因此可以一般地定义

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n;$$

$$\bigcap_{k=1}^{n}A_k=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n.$$

在证明某些集合之间满足等式时，可以直接证明等式两边的集合有相同的元素，也可以利用上面所得的规律以及由这些规律所导出的规律来论证．在论证过程中，画一个文氏图可以帮助我们得到启发．

习 题 1·1

1．写出集合 $H=\{(x,y)\,|\,x,y$ 整数，$-2\leqslant x+y\leqslant 2,\ 0\geqslant 3x-y,\ y-3x\leqslant 2\}$ 的所有元素.

2．"某校中一切高个子的人"是不是一个集合？

3．画出集合 $E=\{(x,y)\,|\,y\leqslant 2x-1,\ x+y>2,\ y>-1\}$ 的图.

4. 写出集合 $\{x, y, z\}$ 的一切子集.

5. 证明 A 为有限集等价于 A 的任何子集为有限集.

6. 设 $A=\{x|x^4-1=0\}$, $B=\{x|x^4-3x^2+2=0\}$, 求 $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$, $B-A$.

7. 化简 $A\cup\emptyset$, $A\cap\emptyset$, $A-\emptyset$, $\emptyset-A$, $(A-B)\cap B$, $(A-B)\cup B$, $(A\cap B)\cup B$, $(A\cup B)\cap B$.

8. 在下列各条件下, A 与 B 分别有什么关系(或是什么集合)?

(1) $A\cap B=A$;　　(2) $A\cup B=A$;　　(3) $A\cap B=A\cup B$;

*(4) $A-B=B$; [提示: 考虑$(A-B)\cup B=A\cup B$.]

*(5) $A-B=B-A$; [提示: 考虑$(A-B)\cup B=(B-A)\cup A$.]

*(6) $(A-B)\cup(B-A)=A$. [提示: 考虑$B=(B\cap A)\cup(B-A)$.]

9. 设 $A=\{a, b\}$, $B=\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$, 问可根据什么规则从 A 写出 B?

10. 求证下列等式

$A-B=A-A\cap B$; $(A-B)\cup(B-A)=A\cup B-A\cap B$;

$(A-B)-C=A-(B\cup C)=(A-C)-B=(A-C)-(B-C)$.

11. 证明等式 $A\subset C$, $B\subset C$ 等价于 $A\cup B\subset C$.

12. 证明等式 $A\supset C$, $B\supset C$ 等价于 $A\cap B\supset C$.

13. 证明 $A-B=A$ 等价于 $A\cap B=\emptyset$.

第二节　全集、补集与对偶关系

对于一个集合 A, 我们常常会遇到"不属于 A 的元素的全体"这一概念. 粗略地说, 这就是补集的初始概念. 例如 A 是"不大于 s 的全体实数的集合". 直观上其补集当然应该是"大于 s 的全体实数", 但仔细一推敲, 显然这"补集"的含义并不确切, 因为泛泛地说"大于 s 的全体实数"并不是真包含了一切不属于 A 的元素, 例如复数就并不包含于其中, 而复数确是不属于 A 的. 至于除 s 外的东西很多, 例如英语字母,

希腊字母等也是不属于 A 的，更无法谈及它们是否大于 s 了，那么复数、英语字母、希腊字母等是否应该属于 s 的补集呢？到底应该如何理解并定义 A 的补集这一概念呢？其实，出现上面含义不确切的主要原因，是没有把前提假定指清楚．例如我们在把"大于 s 的全体实数"作为 A 的补集时，心里有一个没有说出的但又显然的假定，那就是：把全体实数考虑为限制范围（可称之为论域），而这个假定就是讨论问题的前提．也就是说，在考虑任何具体问题时，所谓"所有的元素"总是有特定的含义的，而绝不是漫无边际的．在上面的例子中，"所有的元素"就是指全体实数，这是一个参考集合，在我们所考虑的问题范围内，它就是一个相对的最大的集合，我们把它称为全集，而所讨论的其它集合，都是指它的子集．在不同的问题中，全集不一定相同，但在同类问题中，全集必须是同一个．对具体问题而言，全集往往是明显的，不会混淆的，因此常常不特别说明它，综上讨论，我们得到下述概念：

定义 1 在一些具体问题中，所考虑的一个相对地认为是"最大的"参考集合，叫做全集（或称论域），用 U 表示它．在这类问题中所考虑的其它集合都是 U 的子集．

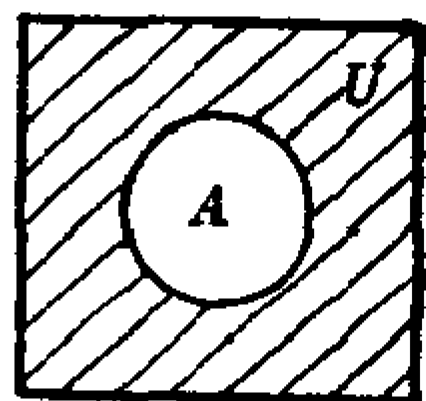


图 1-6

定义 2 设 U 是全集，A 是它的一个子集，则称 $U-A$ 为 A 的补集，记成 $\overline{A}$．

图 1-6 中方形内部表示全集 U，圆形包围的部分表示集合 A，那末阴影部分就是 A 的补集 $\overline{A}$．

显然有

(1) $\overline{(\overline{A})}=A$；

(2) 若 $A=B$，则 $\overline{A}=\overline{B}$，反之也对．

对于补集有两个重要的对偶公式：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};$$

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

这两个公式可由图 1-7 中的图形直观地证明．也可以用第一节定义 3 证明，例如证明第一个公式如下：

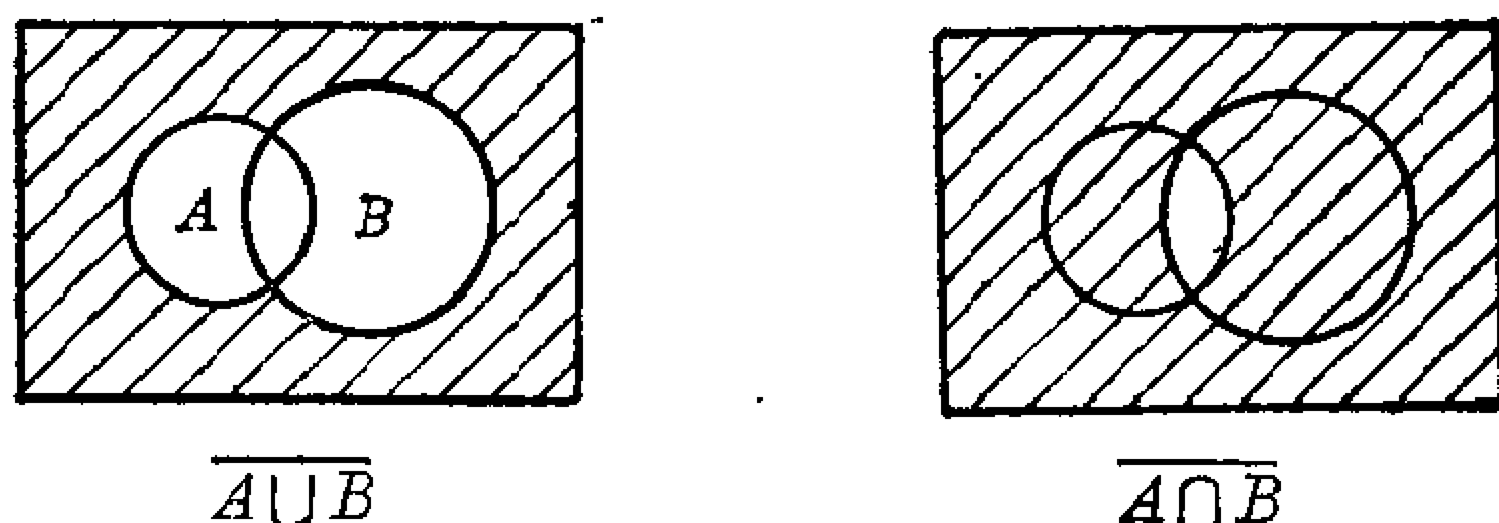


图 1-7

若 $x\in\overline{A\cup B}$，由定义 2 可知，$x\in U$ 且 $x\overline{\in}A\cup B$，于是必有 $x\overline{\in}A$ 且 $x\overline{\in}B$（因若不然，那末 $x\overline{\in}A$ 与 $x\overline{\in}B$ 中至少有一个不成立，不妨设 $x\overline{\in}A$ 不成立，这就是说 $x\in A$，于是 $x\in A\cup B$，这就与 $x\overline{\in}A\cup B$ 矛盾了）．因此 $x\in U-A$ 且 $x\in U-B$，即 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$．故有

$$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}.$$

另一方面，若 $y\in\overline{A}\cap\overline{B}$，那末 $y\in\overline{A}$，$y\in\overline{B}$，即 $y\in U$，$y\overline{\in}A$，$y\overline{\in}B$．因此 $y\overline{\in}A\cup B$（因若不然，那末 $y\in A\cup B$，即 $y\in A$，$y\in B$ 两者总有一个成立，但不论哪一个成立，都与 $y\overline{\in}A$，$y\overline{\in}B$ 相矛盾），所以 $y\in\overline{A\cup B}$，也就是

$$\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cup B}.$$

综合起来，就证明了第一个对偶公式．

第二个对偶公式可以由第一个对偶公式推得，方法如下：

在第一个对偶公式中，取 $A=\overline{C}$，$B=\overline{D}$，得

$$\overline{(\overline{C}\cup\overline{D})}=\overline{\overline{C}}\cap\overline{\overline{D}}=C\cap D,$$

两边再取补集，得

$$\overline{C}\cup\overline{D}=\overline{C\cap D}.$$

这恰是第二个对偶公式.

利用这两个对偶公式，可以从对偶的观点由第一分配律推导第二分配律，方法如下：

$$
\begin{aligned}
A\cup(B\cap C) &= \overline{\overline{A\cup(B\cap C)}} \\
&= \overline{\overline{A}\cap(\overline{B\cap C})}\ (\text{第一对偶公式}) \\
&= \overline{\overline{A}\cap(\overline{B}\cup\overline{C})}\ (\text{第二对偶公式}) \\
&= \overline{(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{C})}\ (\text{第一分配律}) \\
&= \overline{\overline{A}\cap\overline{B}}\cap\overline{\overline{A}\cap\overline{C}}\ (\text{第一对偶公式}) \\
&= (\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}})\cap(\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{C}})\ (\text{第二对偶公式}) \\
&= (A\cup B)\cap(A\cup C).
\end{aligned}
$$

一个集合常常同时代表一个概念，这个概念就是这个集合的特征描述. 例如说，质数是一个集合，它又是一个概念；猛兽也是一个集合，同时又是一个概念. 集合质数、猛兽中的个体各有一个范围，在形式逻辑学中，把这种范围称为质数、猛兽这两个概念的外延.

既然集合对应于概念，那么集合之间的运算就对应于概念之间的逻辑演算. 三种集合运算 $\cup$、$\cap$、$-$ 分别对应于概念的三种逻辑演算："或"、"且"、"非". 例如说：

A 代表概念(或集合)：猫科动物；

B 代表概念(或集合)：猛兽.

那么集合 $A\cup B$ 就代表概念：猫科动物或猛兽；

$A\cap B$ 则代表概念：猫科中的猛兽；

$\overline{A}$ 则代表概念：非猫科动物.

几个集合之间的一个等式或不等式表示一个判断，例如在上面的例子中：

$A\cap B\neq\emptyset$ 表示猫科动物中有猛兽；

$\overline{A}\cap\overline{B}\neq\emptyset$ 则表示有些非猫科动物不是猛兽。

又若　　　　P 代表概念(或集合)：质数；

　　　　　　E 代表概念(或集合)：偶数。

那末　　　　$$P\cap E=\{2\}$$

表示偶质数只有一个，就是 2.

形式逻辑与集合论之间的这种天然联系启发了逻辑数学(数理逻辑)的发生与发展.

习　题　1·2

1. 设 U 是全集，化简以下各集合：

   $\overline{U}$, $\overline{\emptyset}$, $A\cup\overline{A}$, $A\cap\overline{A}$, $A\cup U$, $A\cap U$, $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$, $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$.

2. 试证明：(1) $\overline{A}\subset\overline{B}$ 等价于 $B\subset A$;

   (2) $A\subset\overline{B}$ 等价于 $A\cap B=\emptyset$;

   (3) $A=B$ 等价于 $(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})=\emptyset$.

3. 试证明：(1) $A-B=A\cap\overline{B}$;

   (2) $A\cap(B-C)=B\cap(A-C)=A\cap B\cap\overline{C}$.

4. 由 A、B、C 的文氏图画出下列集合的文氏图：

   (1) $A_1=\{x|x\overline{\in}A$, 且 $x\overline{\in}B\}$;

   (2) $A_2=\{x|x\in A$ 或 $x\in B$, 但 $x\overline{\in}C\}$.

5. 化简 $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$.

6. 若 $U=\{$鸟$\}$, $P=\{$不会飞的鸟$\}$, $Q=\{$雌鸟$\}$，试用语言来描述 $\overline{P}\cap Q$ 和 $P\cap\overline{Q}$ 这两个集合.

7. 若 $U=\{$自然数$\}$, $A=\{$奇数$\}$, $B=\{$质数$\}$，求 $B\cap\overline{A}$.

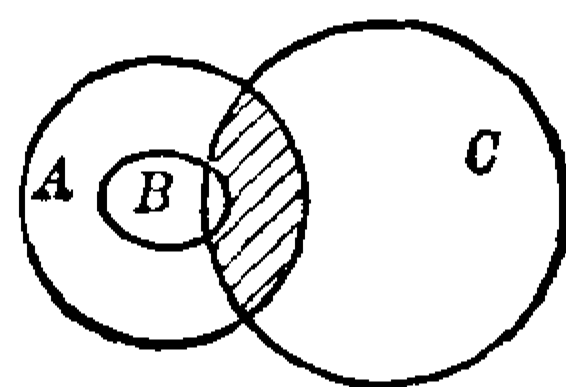


图 1-8

8. 若 $U=\{$活鸟$\}$, $C=\{$金丝雀$\}$, $S=\{$会唱歌的鸟$\}$, $W=\{$喂养得很好的鸟$\}$.

   (1) 试写出一些句子，使它们分别等价于下列各式：① $C\subset S$; ② $S\cap W\cap\overline{C}\neq\emptyset$.

   (2) 把下列各句用集合的运算及关系等符号表示出来：

   ① 有些金丝雀养得很好；

② 有些会唱歌的鸟养得不好;

③ 养得不好的金丝雀不会唱歌.

9．用 A, B, C 写出图 1-8 中阴影区域的表达式.

10．已知 $\overline{A}_1, \cdots, \overline{A}_n$, 求

$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)}$, $\overline{(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)}$.

第三节　全集的划分、集合的笛卡儿积

如果有一批产品,其中只有合格品与废品两种,设每个产品为一个元素,全部产品组成一个全集 U. 设 $A=\{$全部合格品$\}$,那末 $\overline{A}=\{$全部废品$\}$. 于是 $U=A\cup\overline{A}$ 相当于把全集分成互不相交的两部分,我们称 A, $\overline{A}$ 构成 U 的一个划分. 这个划分实质上就是把 U 分成 A 和 $\overline{A}$ 两类, 因此一个划分对应于一个分类.

但是只考虑把全部对象 U 分成两类往往是不够的,例如还是同一批产品,但如今需考虑三个等级:合格品、等外品、废品. 那末就有三个集合了: $A_1=\{$全体合格品$\}$, $A_2=\{$全体等外品$\}$, $A_3=\{$全体废品$\}$(如果我们假定产品共有 N 个,每个产品给以编号,而且假定合格品、等外品的个数分别为 N_1 和 N_2, 把合格品排成 1 号到 N_1 号, 等外品排成 N_1+1 号到 N_1+N_2 号,废品排成 N_1+N_2+1 号到 N 号 $(N_1+N_2<N)$,那末

$$A_1=\{1, 2, \cdots, N_1\},$$
$$A_2=\{N_1+1, \cdots, N_1+N_2\},$$
$$A_3=\{N_1+N_2+1, \cdots, N\},$$

于是全集分成了互不相交的三部分: A_1, A_2, A_3. 即 $U=A_1\cup A_2\cup A_3$, 我们称 A_1, A_2, A_3 为全集 U 的一个划分. 这个划分实质上就是把 U 分成 A_1、A_2、A_3 三类.

一般地可归纳为如下概念（并可用任意一个集合 A 代替全集 U）：

定义 1 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 A 的子集，如果满足：

(1) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A$;

(2) 对于任意的 $i \neq j$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$，有

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (\text{即 } A_1, \cdots, A_n \text{ 两两不交}),$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成 A 的一个划分.

若 $A_1, \cdots, A_n$ 是 A 的一个划分，那末 A 就分成了互不相交的 n 个类：$A_1, A_2, \cdots, A_n$. 任意给定 A 中的一个元素 a，就可判别它属于哪一个 A_i.

定义 2 设 A、B 是任意两个集合，由这两个集合可以作出一个新集合：

$$\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\},$$

这个新集合称为 A 与 B 的笛卡儿乘积，记成 $A \times B$（读作"A 叉乘 B"）.

【例 1】 若 $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$，那末 A, B 均位于数直线上，按定义得

$$A \times B=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2,1), (2,2), (2,3)\};$$

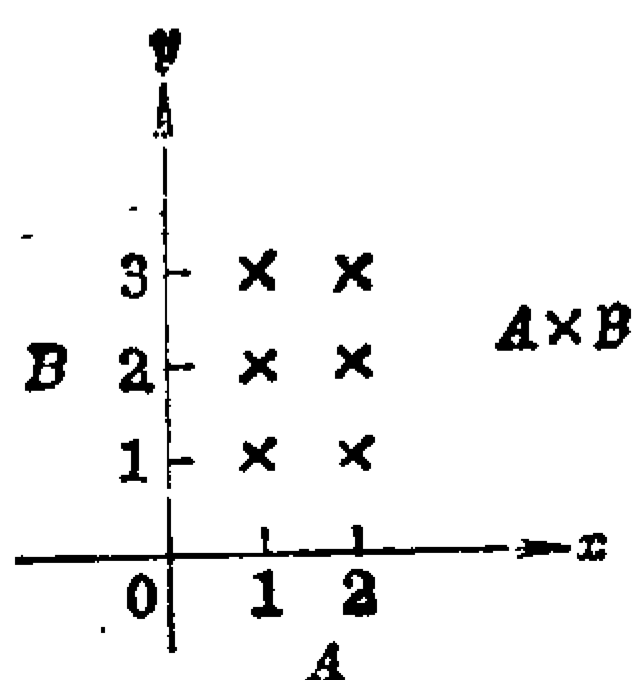
$$B \times A=\{(1, 1), (1, 2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\}.$$

于是 $A \times B$, $B \times A$ 均在数平面上（图 1–9）.

由图 1–9 可知：

$$A \times B \neq B \times A.$$

又因为在一个集合中的元素次序是可以任意写的，所以 $B \times A$ 又可写为 $B \times A=\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$，由此可看到 $A \times B$ 与 $B \times A$ 的元素非常相象，$B \times A$ 中的每一个元素都可以在 $A \times B$ 中找到一个与其匹配的元素，使得这两个元素的两个分量恰好次序相反. 例如 $B \times A$



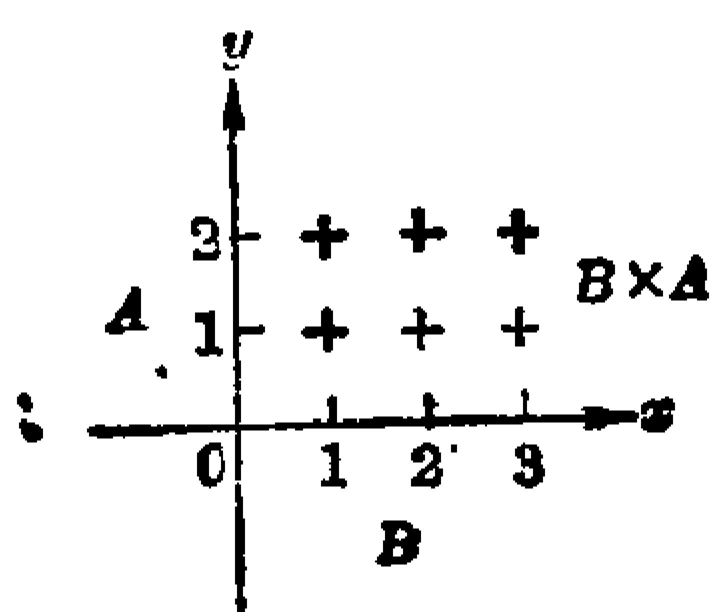
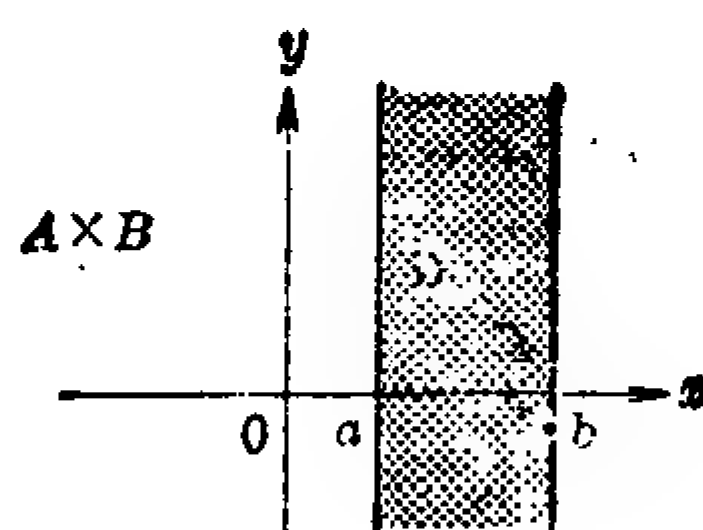


图 1-9



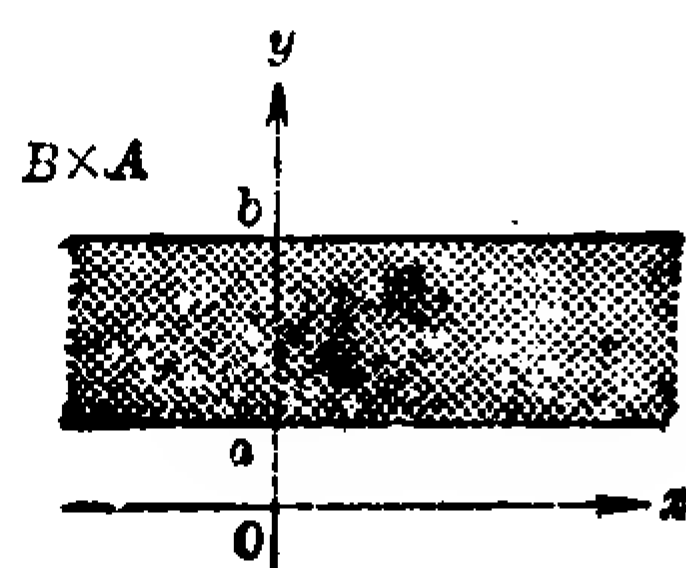


图 1-10

中有元素(3, 1), $A\times B$ 中有与它匹配的元素(1, 3), 而(3,1)与(1, 3)恰有互为相反次序的分量.

【例 2】 若 $A=[a, b]$, $B=(-\infty, \infty)$, 那末 $A\times B$ 与 $B\times A$ 分别为图 1-10 中上面和下面的阴影部分.

【例 3】 若 $A=\{p, q, r\}$, $B=\{1,2\}$, $A\times B$ 的元素(a, b)中的 a 选自 A; b 选自 B, 于是

$$A\times B=\{(p, 1), (p, 2), (q, 1), (q, 2), (r, 1), (r, 2)\};$$

$B\times A$ 的元素为(b, a), 故

$$B\times A=\{(1,p), (2,p), (1,q), (2,q), (1,r), (2,r)\}.$$

	×	1 (B)	2 (B)
A	p	(p, 1)	(p, 2)
	q	(q, 1)	(q, 2)
	r	(r, 1)	(r, 2)

($A\times B$ 的元素表)

	×	p (A)	q (A)	r (A)
B	1	(1, p)	(1, q)	(1, r)
	2	(2, p)	(2, q)	(2, r)

($B\times A$ 的元素表)

对笛卡儿积中的元素(a, b), 次序 a 在前, b 在后是很重

要的. 我们给出下述定义:

定义3 两个集合的笛卡儿积中的元素称为一个有序对; 当且仅当 $a=c$, $b=d$ 时才认为有序对 (a, b) 和有序对 (c, d) 相等.

由定义3知: $a\neq b$ 时, 有序对 $(a,b)\neq(b,a)$. 因此一般地

$$A\times B\neq B\times A.$$

这是运算×的不可交换性质, 读者应特别注意.

两个集合的笛卡儿乘积可以推广到任意多个.

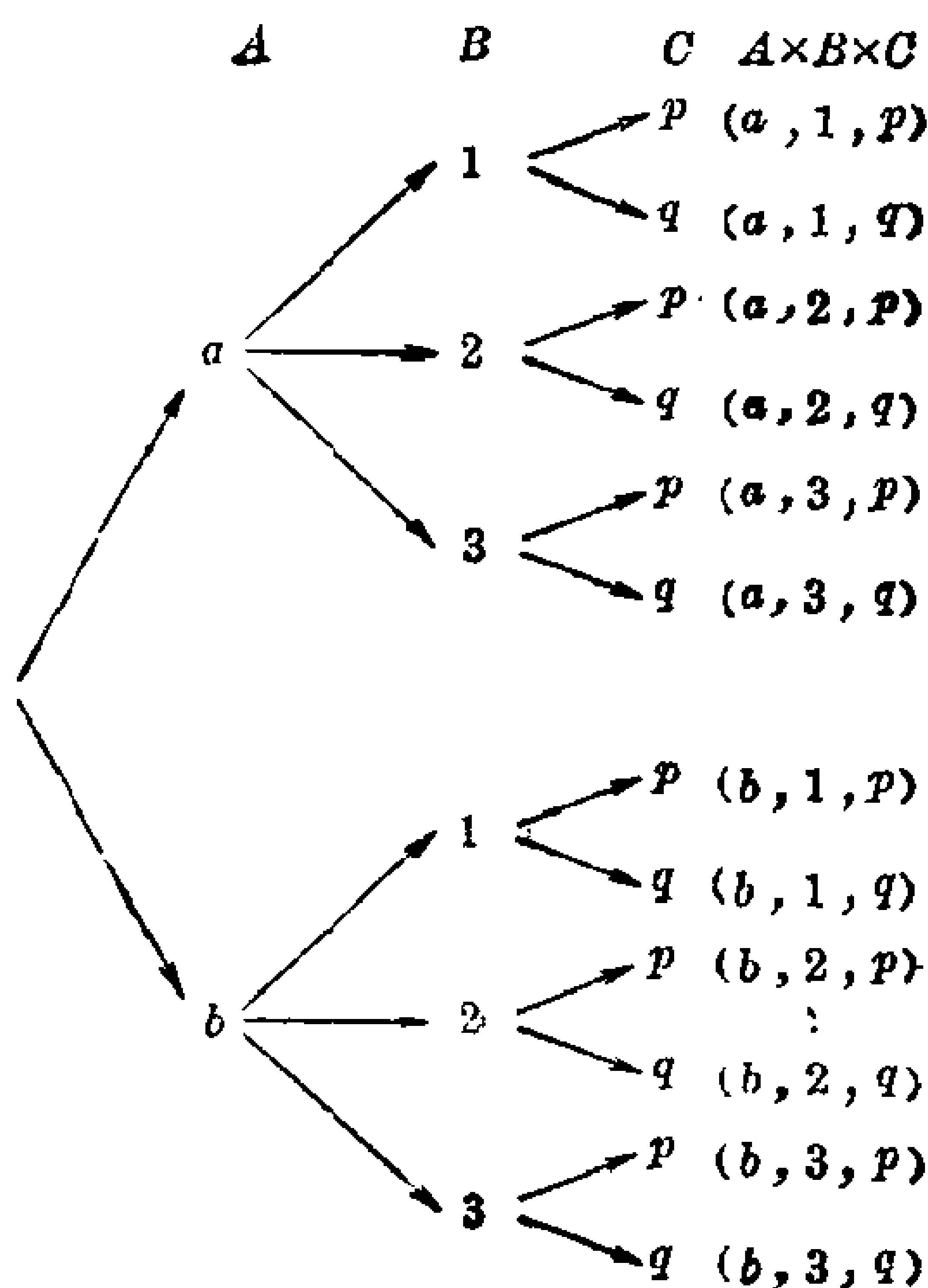
定义4 n 个集合 $A_1, \cdots, A_n$ 的笛卡儿乘积定义为

$$A_1\times\cdots\times A_n=\{(a_1, a_2, \cdots, a_n)\mid a_1\in A_1, \cdots, a_n\in A_n\},$$

其中的元素 $(a_1, \cdots, a_n)$ 称为 n 元有序组. 两个 n 元有序组 $(a_1, \cdots, a_n)$, $(b_1, \cdots, b_n)$ 当且仅当 $a_1=b_1, \cdots, a_n=b_n$ 都成立时, 才认为相等.

【例4】 若 $A=\{a, b\}$, $B=\{1, 2, 3\}$, $C=\{p, q\}$, 试写出 $A\times B\times C$ 的全部元素.

解: 我们画一个"树图"以列出 $A\times B\times C$ 的全部元素如下:



经过仔细检查，可以得到等式

$$(A_1\times\cdots\times A_{n-1})\times A_n=A_1\times\cdots\times A_n.$$

习　题　1·3

1. 若 $A=\{c, b\}$, $B=\{a, b\}$, $C=\{x, y\}$. 求 $A\times B$, $B\times A$, $A\times B\times C$, $C\times B\times A$, $B\times B$, $A\times A\times B$.
2. 求证：若 $A\times B=B\times A$, 则 $A=B$. 反之也对。
3. 试举简单的例子，验证下列等式：

   (1) $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$ （结合律）；

   (2) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$,

   $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$,

   $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$,

   $A\times\bar{B}=(A\times U)-(A\times B)$

   （请注意 $A\times\bar{B}\neq\overline{A\times B}$）；

   (3) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$,

   $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$,

   $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$.

第四节　有限多个互相排斥的可能结果的随机试验所涉及的随机事件

在进行科学试验中，我们会遇到两类很不相同的情况。第一类情况是：试验结果完全由试验条件所决定. 例如试验条件是在标准大气压下加热到100℃的纯水，试验结果就是沸腾. 不论哪一次试验，谁去做，都是这个结果，不会变更，这规律是必然的，做这类试验就是为了了解这些必然性规律；第二类情况是：试验结果本身是不确定的. 例如一个人去射击，每次试验的结果是环数. 那末做一次试验，其结果到底是多少环呢？这在事先是不能肯定的，因为这与射击者的主观状

态——如紧张程度、休息状况、技术及客观条件——如枪的质量、环境、时间等等分不开；即使在类似的情况下，也还有大量无法一一列举的干扰因素，因而在同样条件下，第一枪和第二枪射中的环数也未必一样，象这样的试验叫做**随机性试验**. 当然随机试验也是有一定的规律的，例如技术高的人大体上射中环数较高，技术低的人往往射中环数较低. 类似于这样的规律性与前面讲的必然性规律是很不相同的，称为**随机规律**.

本节考虑的是在一次试验中，只能有有限多个彼此排斥的可能结果的随机试验. 这有限个可能结果放在一起组成一个集合，作为一个全集. 因此，每试验一次的可能结果总是这个全集中的某个元素. 本节中考虑的全集概指这种全集，不再一一声明.

【例 1】 某一批产品，分成三级：合格品、等外品、废品. 从这批产品中任取一件（即做一次随机试验），其结果只可能是这三种之一，即：合格、等外、废品. 于是每次随机试验的全部可能结果是这三种，把这三种可能结果罗列在一起，就得全集：{合格品，等外品，废品}. 由于每次试验的结果总在这全集之内，所以我们又给这个集合（全集）取另外一个名字，叫做**必然事件**. 而把这集合中的每个元素称为一个**基本事件**.

【例 2】 某一批产品有 N 个，每个产品都刻有出车间的号码：1, …, N，从这批产品中任取一件（即做一次随机试验），其结果只可能是号码 1 到号码 N 之一，于是把这些号码放在一起，就得到全集 $\{1, 2, \cdots, N\}$，这个全集就是必然事件，基本事件就是 1, 2, …, N，一共 N 个.

【例 3】 有一批产品，从中任取 n 件（这里做一次试验就是“任取 n 个”），数其中合格品的个数. 这个试验当然是随机

的，因为任取的n个产品中的合格品的个数也可能为0个，也可能为1个，…，也可能为n个（n比总的合格品数为小），于是这里的每次试验（取n个）的结果（合格品个数）是一个数，这个数可以自0, 1, …, 到n, 因此0, 1, …, n中每一个数都是一个可能结果，即是一个基本事件．则全集或必然事件为$\{0, 1, \cdots, n\}$．

由上面几个例子可以看出：即使对同一批产品，由于问题的提法不同，即对“做一次试验”的理解可以不同，基本事件也就不同，必然事件（全集）的内容也不一样．所以在具体问题中，必须注意三个问题：(1)“做一次试验”的具体含义；(2)哪些是“基本事件”（即一次试验的可能结果之一）？(3)“必然事件”（全集——即全体基本事件组成的集合）是什么？

由上述例子可以归纳出下述定义：

定义1 如果随机试验考虑的各种可能结果是彼此排斥的，那末其中的任一个可能的结果称为一个*基本事件*．全体基本事件的集合叫做*必然事件*．必然事件就是全集，仍记成U（有些书上称为*样本空间*）．

定义2 以必然事件U作为全集（在此只讨论U是有限集的情况），它的任何一个子集称为一个*随机事件*，简称*事件*（事件仍用集合的记号，因为它本质上是一个集合）．

由此可知：事件是由某些基本事件所组成的．例如在例1中“任取一个产品，恰好是非合格品”是一个事件，它包含等外品和废品两个基本事件；又“任取一个产品，恰好是非废品”也是一个事件，它包含合格品、等外品两个基本事件．在例3中，“任取n个产品，其中合格品数$\geqslant 5$”是一个事件，它由5, 6, …, n等基本事件组成．“任取n个产品，其中不合格品数$\geqslant 10$”也是一事件，它包含基本事件0, 1, …, $n-10$．

定义 3 空集$\emptyset$不包含任何基本事件，又称为**不可能事件**.

例如"任取 n 个产品，其中恰有 $n+1$ 个合格品"就是一个不可能事件.

在例 1 中，如果令 A="任取一个产品，恰为非废品"，B="任取一个，恰好为非合格品". 对于某一次随机试验，如果其结果为合格品，因为它是 A 的元素，但不是 B 的元素，所以说，在该次试验中，随机事件 A 发生了，而随机事件 B 未发生.

在例 3 中，如果令 A="任取 n 个产品，其中合格品数 $\geqslant 5$"，B="任取 n 件产品，其中不合格品 $\geqslant 10$". 设 $n=20$，若在某一次"任取 $n(=20)$ 件产品，"这样的随机试验中，合格品为 19 个（不合格品为 1 个），即该次试验结果为基本事件 $n-1$ $(=19)$，因为 $n-1=19\in A=\{5, 6, \cdots, n\}$，所以在该次试验中，我们说事件 A 发生了；又因为 $n-1=19\overline{\in} B=\{0, 1, 2, \cdots, n-10\}$，所以说在该次试验中，事件 B 未发生.

由上面的感性分析，可以归结为：

定义 4 在做一次随机试验时，试验的结果是一个基本事件，我们记该基本事件为 u. 对于事件 A，如果 $u\in A$，则称事件 A 在这次试验中*发生了*；如果 $u\overline{\in} A$，则称事件 A 在这次试验中*未发生*.

【例 4】 在射击试验中，每射一次可能取得的环数为 0, 5, 6, 7, 8, 9, 10. 它们都是基本事件，故必然事件为 $u=\{0, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. 设事件 A="射一次所得的环数超过 8"，那末 $A=\{8, 9, 10\}$. 如果在某次射击中得到了 7 环，即 $u=7$，那末因为 $u\overline{\in} A$，所以在这次射击中事件 A 未发生. 又若在另一次射击试验中得到了 9 环（即 $u=9$），因为 $u=9\in A$，故在

该次射击中事件 A 发生了．这样分析的结果，与直观是完全一致的．又如果事件 B=“射中环数 $\geqslant 5$”，那末 $B=\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$，因而 $A\subset B$．于是从集合的角度说，$A\subset B$ 就显然可推出“若 A 发生(射中环数 $\geqslant 8$)，则一定 B 发生(射中环数 $\geqslant 5$)”，这就导致一个一般的概念：

定义 5 如果由 A 发生，一定可以断定 B 发生，则称事件 A 蕴涵事件 B，记成 $A\Rightarrow B$．

可见“事件 A 蕴涵事件 B”等价于“B 的基本事件全体包含 A 的基本事件全体”．简单地表示，即：

$$A\Rightarrow B \quad \text{等价于} \quad A\subset B.$$

我们必须注意汉语词义的不同，“包含”是指集合的“大小”关系，“蕴涵”是指从一个事件的发生可以推断另一个事件的发生，是逻辑关系．它们是两个不同的概念，不要混淆．另一方面又是有联系的，“A 蕴涵 B”相当于作为集合的“B 包含 A”(A 包含于 B)，形式上，“蕴涵”相当于“包含于”．

既然事件本质上就是一个集合，那末由两个集合运算得到的一个新集合也就代表一个新事件．于是集合的运算就自动地转化为事件的运算了．以下分析一下事件的“并”、“交”、“补”三种运算的含义(“减”并非独立运算，因为 $A-B=A\cap\overline{B}$)：

(1) “和”事件 $A\cup B$ 的含义

在某次试验中，“事件 $A\cup B$ 发生”，就是指试验结果 $u\in$ 集合 $A\cup B$，因此 $u\in A$，$u\in B$ 至少有一个成立；如果 $u\in A$，那就是 A 发生了；如果 $u\in B$，那就是 B 发生了．所以事件 $A\cup B$ 发生等价于事件 A 及事件 B 至少有一个发生．有的书上把 $A\cup B$ 这事件写成“或 A 或 B”．$A\cup B$ 发生即是“或 A 或 B”发生．事件 $A\cup B$ 称为 A 与 B 的“和”事件．

(2) “积”事件 $A\cap B$ 的含义

在某次随机试验中，“事件 $A\cap B$ 发生”，就是指试验结果 $u\in$ 集合 $A\cap B$. 这表明 $u\in A$, $u\in B$ 都成立. 也就是说: 事件 A 及事件 B 都发生. 有些书上把 $A\cap B$ 写成“A 且 B”，$A\cap B$ 发生就是“A 且 B”发生. $A\cap B$ 发生等价于 A、B 都发生. 事件 $A\cap B$ 称为 A 与 B 的“积”事件.

(3) 事件 $\overline{A}$ 的含义

在某次随机试验中，“事件 $\overline{A}$ 发生”，就是指试验结果 $u\in$ 集合 $\overline{A}$, 也就是 $u\overline{\in}A$. 这说明在该次试验中 A 未发生，即 $\overline{A}$ 表示“A 不发生”. 有些书上把 $\overline{A}$ 这事件写成“非 A”. $\overline{A}$ 发生即是“非 A”发生. $\overline{A}$ 称为 A 的对立事件. 粗略地说，$\overline{A}$ 是 A 的反面.

定义 6 A 的补集 $\overline{A}$ 称为事件 A 的对立事件.

定义 7 如果 $A\cap B=\emptyset$, 称为事件 A 与事件 B 互不相容. 即 A、B 不能都发生.

注 (1) 以上对事件的定义有一个前提假定: 即 U 是有限集. 一般地，如果 U 不是有限集，那末我们并不把 U 的每个子集都作为事件，因为其中有很多是没有什么现实意义的，数学处理也困难. 在实际上，往往规定其中特定的一部分子集作为研究对象，这种特定子集中的每一个称为一个事件. 对这些事件来说，本节所有的概念、结论和讨论除定义 2 外全都适用.

(2) 如果根本无视 U 的存在与否，只要在某种含义下规定了什么叫“事件”及哪些是“事件”(当然也无所谓是 U 的子集与否. 例如说，只要是在某种随机试验中能按试验结果判断某事是否发生，就把该事叫做“一个事件”)，那末对这样意义下的“事件”，仍然可以定义运算 $\cup$ 与 $\cap$ 如下:

$A\cup B$: “A 或 B”;

$A\cap B$: “A 且 B”;

$$\bar{A}: “非 A”.$$

这样就把具体的、与集合运算相联系的事件的定义推广到更一般的、不再与集合相联系的纯逻辑形式事件的定义了. 对这种事件，分配律与对偶公式等仍成立. 在此举一个生活上的简单例子来说明对偶公式的意义：

设 A=“老王在图书馆”，B=“小张在图书馆”. 那么 $A\cup B$=“老王或小张在图书馆”，$\overline{A\cup B}$ 说明上述事件不发生，即“老王和小张都不在图书馆”. 因而就是：“老王不在图书馆”且“小张不在图书馆”，即是 $\bar{A}\cap\bar{B}$，因此得

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}.$$

这即是对偶公式之一.

习　题　1.4

1. 一个四面体的各面分别涂以红、黄、蓝、白四种颜色，投掷一次为一个试验，试列出基本事件与必然事件.
2. 有五个带号码 1 至 5 的球，任取两个作为一次试验（不计先后次序），问基本事件是哪些？必然事件是什么？
3. 在上题中，如果考虑次序，则相应的结果是什么？
4. 举例说明另一个对偶公式 $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$ 的含义.
5. 用事件“发生与否”的语言来说明分配律公式的含义.
6. 证明

$$\overline{(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap\bar{B})}=(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B)$$
$$=(\bar{A}\cup B)\cap(A\cup B).$$

7. 用事件 A、B、C 来表达下列事件：

(1) A 发生且 B 与 C 都不发生；

(2) A、B、C 都发生；

(3) A、B 都发生但 C 不发生；

(4) A、B、C 至少有一个发生；

(5) A、B、C 都不发生；

(6) A、B、C 中至少有两个发生；

(7) A、B、C 中不多于一个发生；

(8) A、B、C 中不多于两个发生.

8. 化简 $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cap B)$.

第一章小结

集合是有特定内容的一堆东西. 描述一个集合的方法主要有:列举法与特征描述法.

为了运算的方便,我们引进一个空集,它没有任何元素. 在各种具体场合里,表达空集的语言尽管可以不同,但在实质上是同一个,即 $\emptyset$.

一个集合是一堆东西,一个元素是这些东西中的一个. 集合与元素这两个概念不能混淆. 例如: a 指元素, $\{a\}$ 指集合, 但它只有一个元素 a. 对于一个集合 A 而言, $\{A\}$ 就是另一类的一个集合, 它以 A 作为它的唯一元素. 可见一个集合 A 可以是一个更复杂集合 $\{A\}$ (或 $\{\emptyset, A\}$, 或 $\{\emptyset, A, B, \{A, B\}\}$ 等) 的元素. 一个集合什么时候应看成一个更复杂的集合的元素,要看具体的场合,在集合 $\{\emptyset, A\}$ 中, $\emptyset$ 与 A 都是元素.

全集是讨论问题时相对最大的对象,它是一个参考集合. 在不同的问题中全集可以不同.

集合运算的基本规律有:

$$A\cap\overline{A}=\emptyset;\quad \overline{\overline{A}}=A;$$

$$A\cup A=A\cap A=A;$$

$$A-B=A-A\cap B=A\cap\overline{B}.$$

$$A\subset B\begin{cases}\text{等价于 } A\cap B=A;\\ \text{等价于 } A\cup B=B.\end{cases}$$

交换律,结合律,两个分配律,对偶公式.

具有有限个彼此排斥的可能结果的随机试验所涉及的事件，本质上就是有限全集的一个子集合. 要掌握事件发生与否、事件运算及其运算规律的直观含义(即逻辑含义)，以便由此能理解更一般的随机试验所涉及的事件、它们的运算及其规律.

证明某些集合的一个等式可以有下列办法:——画一个文氏图，直观地发现并证明公式;——从集合相等的定义出发(即第一节定义 3 及 4) 证明两边有相同的元素，或双方互相包含;——利用已经推导或证明过的规律(公式)来证明;——用反证法来证明.

附录　弗晰集(模糊集)的简单介绍

弗晰概念是常见的．例如我们请某人到某个会场里数百人中去找一个“高个儿大胡子的胖子”．在这里，我们给出的一些特征：“高个儿”、“大胡子”、“胖子”，但都是一些很不确切的概念，或者说是模糊的概念．到底多高才能算高？多重才能算胖？胡子多少才能算大胡子？都没有明确的标准和界限．例如说某人身高 1.74 米，我们既不能绝对地说他“高”，也不能绝对地说他“不高”，一般说来，说他“有一点高”显得更合适．同样，对 70 公斤重的某人，我们也不能确切地说明他是否“胖”．“胖”当然要看高度与体重之间的比率．但是即使考虑这种比率，也不能确切地给出一个“胖”的界限．事实上，硬给一个界限并不合适，因为我们无法解释为什么比这个界限少一点就不行．这种给定一个绝对界限的办法太僵死，相反地，不给定一个绝对的界限似乎更灵活．没有绝对标准的概念称为“模糊的”概念．“高个子”、“胖子”、“大胡子”等概念都是模糊的．虽然如此，但只要你对这些模糊的概念及该会场中所有的人进行综合考虑以后，常常可以成功地在这数百人当中寻找到所要找的人．这种事实说明人们早已习惯地利用一些模糊的、不确切的概念在进行思维．并成功地进行分类和选择．所以对这些界限不分明的、模糊概念作一些研究，是非常必要的，这些概念的研究就构成了弗晰集理论．

注意　弗晰集并不是一个通常的集合，在以下几段中，我们会渐渐明确这一点．但是，在弗晰集之间，有类似于集合之

间的一些关系和运算，所以称它为弗晰集．弗晰集的理论是最近一、二十年才发展起来的一个蓬勃的数学新分支．

一、弗晰概念

当我们给定一个集合（通常的集合）时，往往同时给出了一个确切的概念．例如，$A=\{$1980年秋季某小学中小于11岁的学生$\}$，那末对该校的每一个学生，我们都可以明确地判断他是否属于A．但是人类的思维是很复杂的，经常会遇到一些象开头部份所举的那些"模糊的"概念．我们已经说过，各人对"高个子"的标准是不同的，即使是由某一个人说了算，那末此人也很难给出一个确切的标准，因为如果给出了一个界限，例如说1.76米，那末为什么1.76米算高？而1.75米就不算高？绝对地给出一个标准界限，让人回答"是否符合"，在实际运用中并不科学．更合理的办法应该是给出一种"记分"．例如说，1.80米以上的人我们认为是"高个子"，就给"1.80米以上的人"记100分，意即100%的符合．同时我们并不把1.80米以下的人通通拒之于"高个子"之外，可以认为1.78米到1.80米之间（但不到1.80米）的人是近乎高个子，记以80分，意即80%地符合高个子（指每个人"符合的程度"为80%，而不是指80%的人符合）．再如，认为1.76米到1.78米（但不到1.78米）的人是半高个子，记以60分，意即高度在这一范围的每个人符合高个子的程度为60%；对1.74米到1.76米的人可以认为是有点儿高，记以30分，意即这样的一个人符合高个子的程度为30%；最后，譬如说认为1.74米以下的人不是高个子，那就记以0分，意即不符合"高个子"．由上面可以看到：给定了一种"记分"的规定后，模糊概念就定下来了．

类似“高个子”这样的模糊概念还很多．例如“年轻人”，“能干的人”，“好天气”，两个人“关系亲密”，“长得象”，“较红”的色彩，“较亮”的光线，“清晰”的图象，“圆乎乎的图形”，“针状图形”，“近似正三角形”，“质量还不错”的产品等等，它们都不是完全确切的概念．对于一个具体给定的对象，我们很难确切地断定它是否符合还是不符合这种性质．我们给这种“模糊”的概念取一个“学名”，叫做**弗晰概念**（“弗晰”就是“不清晰”的意思）．但是这只是一个直观的说法，还需要对这种概念进行数学加工，以便容易把握住它的数量关系．

二、弗晰集的定义

设我们考虑的对象为北京市成年男子全体，这是一个全集或称为论域（所讨论的对象的范围）．那末$A=$｛北京市1.77米以上的成年男子｝是一个集合，它是全集的一个子集，它确定了一个有确切范围的概念：“北京1.77米以上的成年男子”．但是，｛北京市成年高个子男子｝并不是一个集合，因为这是一个不确切的范围，对于一个人，我们并不能确切地断定他是否属于这个范围，也就是说“北京成年高个儿男子”是一个模糊概念（或弗晰概念）．

对于以上两种概念，比较如下：

集合A规定的概念（1.77米以上的人）		弗晰概念（高个子）	
任给一个北京市成年男子的符合程度		任给一个北京市成年男子的符合程度	
1.77米以上	符合（即100%符合）	1.80米以上	100%符合
		1.78～1.80米	80%符合
不到1.77米	不符合（即0%符合）	1.76～1.78米	60%符合
		1.74～1.76米	30%符合
		不到1.74米	0%符合

由此可见，在事实上，全集中给定的一个元素对于全集的某个子集所规定的概念的符合程度可有两个等级：符合（即100%符合），不符合（即0%符合）；但是全集（即论域）中给定的一个元素对于全集的一个弗晰概念的符合程度可以允许有很多等级（在上面的例子中，弗晰概念"高个子"就有五个等级）．人类的思想本来是很灵活的，弗晰概念就是反映思维的灵活性的一种概念．利用这种概念可以避免不必要的绝对化．在上面的例子中，对于全集（论域）中的任意一个元素（即北京市的任意一个成年男子）是否符合弗晰概念"高个子"的要求，表现为五个等级，即五种不同的符合程度．一般说来，"符合程度"（即等级）可以由任何一个预先指定的百分数规定．

因此，从一个集合可规定一个确切的"是非概念"．例如上面的例子中，集合{北京市1.77米以上的成年男子}就规定了"是非概念"："是否高于1.77米"．反之，从对于全集中的每个元素都能判别"是"或"否"的是非概念，也能规定一个集合，而且它是全集的一个子集．事实上，这只需取全集中的{全体回答为"是"}的元素就可以了．但是弗晰概念与是非概念却不同，对于一个弗晰概念，全集中的每个元素未必都能简单地判别它是否全符合（100%符合）或全不符合（0%符合），亦即不能简单地回答以"是（100%符合）"或"非（0%）"，而是分成不同的符合程度等级（百分数），全集（论域）中的每个元素都有一个等级（百分数）．因此，弗晰概念就不是一个简单的是非概念了．如果全集（论域）中的每个元素都对应于一个百分比（即规定了一个等级），这就在全集（论域）U上规定了一个等级函数．"高个子"只有在规定了全集（论域）上的某个等级函数（例如上面例子中就规定了一个确切的等级函数：

1.80米以上	100%

[1.78, 1.80)	80%
[1.76, 1.78)	60%
[1.74, 1.76)	30%
不到 1.74 米	0%)

后，我们才认为它是一个有确切数学含义的弗晰概念．所以一个弗晰概念就是全集上的一个等级函数．我们称这种具有确切数学含义的弗晰概念为**弗晰集**．更确切地说，应称之为全集(论域)的**弗晰子集**．弗晰集一般用符号 $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, … 等表示．

全集 U 的一个子集 A，对于全集中的任意一个元素 u_0，我们都可以判断它是否属于 A，但是对于 U 的一个弗晰子集 $\underset{\sim}{A}$ 而言，则不能确切地判定 u_0 是否属于 $\underset{\sim}{A}$，而只能说明 u_0 有多大的资格作为 $\underset{\sim}{A}$ 的"成员"．在 u_0 处，等级函数的值恰恰表明 u_0 作为 $\underset{\sim}{A}$ 的"成员"的资格(或程度)．

下面我们对全集 U 为有限集的情况，更确切地叙述一下上面的概念．

设全集(论域) U 为有限集

$$U=\{1, 2, \cdots, n\}.$$

定义 1 对于全集 U 中任意一个元素 k(k 为整数，$1\leqslant k\leqslant n$)，如果都对应了一个百分数，把这个百分数记成 $\underset{\sim}{A}(k)$，那末 $\underset{\sim}{A}(k)$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 是全集 U 上的一个函数 $(0\leqslant \underset{\sim}{A}(k)\leqslant 100\%)$，称为全集 U 上的一个**等级函数**．全集(论域) U 上的一个等级函数称为全集的一个**弗晰子集**(或**论域上的一个弗晰集**)．弗晰集一般用拉丁大写字母下面加以标记"～"表示，例如 $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{C}$, … 等．具体地可写成

$$\underset{\sim}{A}=\left\{\begin{matrix} 1, & 2, & \cdots, & n \\ \underset{\sim}{A}(1), & \underset{\sim}{A}(2), & \cdots, & \underset{\sim}{A}(n) \end{matrix}\right\}.$$

其中 $\underset{\sim}{A}(k)$ $(1\leqslant k\leqslant n)$是 $\underset{\sim}{A}$ 对应的等级函数．它说明全集(论域)中的元素 k 作为 $\underset{\sim}{A}$ 的"成员"的资格为 $\underset{\sim}{A}(k)$．

全集 U 的一个普通子集 A 也可以看成为一个特殊的弗晰集 $\underset{\sim}{A}$，它的等级函数为：

$$\underset{\sim}{A}(k)=\begin{cases}1, & \text{当 } k\in A,\\ 0, & \text{当 } k\overline{\in} A.\end{cases}$$

可见弗晰集是"集合"这一概念的推广．

弗晰集也可以表示为，例如

$$\underset{\sim}{B}=\{(u,\ \underset{\sim}{B}(u))\ |u\in U,\ 0\leqslant \underset{\sim}{B}(u)\leqslant 1\},$$

其中 U 是全集(论域)．

我们需要着重指出以下两点：

1） 弗晰集 $\underset{\sim}{A}$ 不是普通意义下的集合，而只是确定在全集的每个元素上的一个等级函数 $\underset{\sim}{A}(u)$ $(0\leqslant \underset{\sim}{A}(u)\leqslant 1)$，$\underset{\sim}{A}(u)$ 代表 u 作为 $\underset{\sim}{A}$ 的"成员"的资格．

2） 不同的等级函数 $\underset{\sim}{A}(u)$，$\underset{\sim}{B}(u)$ $[0\leqslant \underset{\sim}{A}(u),\ \underset{\sim}{B}(u)\leqslant 1]$ 确定不同的弗晰集 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$．因此在论域（全集）中"高个子"的人的全体还不能成为一个弗晰集，必须在给定"高"的具体含义后(即给定一个等级函数后)才成为一个弗晰集．于是对于"高个子"这个模糊概念，可以给出很多不同的弗晰集(等级函数)．在实际遇到的问题中，重要点往往在于规定出一个较恰当的等级函数．不过，一般说来，并没有给出等级函数的统一方法，只能在具体问题中，根据经验，找出一些与经验符合的等级函数来．在有些书上把等级函数叫做隶属函数．

对于一个弗晰集 $\underset{\sim}{A}$(当然这时论域假定已预先给出)

$$\underset{\sim}{A}=\left\{\begin{matrix}1, & 2, & \cdots, & n\\ \underset{\sim}{A}(1), & \underset{\sim}{A}(2), & \cdots, & \underset{\sim}{A}(n)\end{matrix}\right\}.$$

我们可以考虑如下的普通集合：

$$A_{80\%}=\{k\,|\,1\leqslant k\leqslant n,\ \underset{\sim}{A}(k)\geqslant 80\%\}.$$

更一般地，对 $0<\lambda<1$，可以考虑依 λ 变的一族普通集合 $\{A_\lambda\}$，其中 A_λ 为普通集合，它由下式确定：

$$A_\lambda=\{k\,|\,1\leqslant k\leqslant n,\ \underset{\sim}{A}(k)\geqslant\lambda\},$$

这族集合 $\{A_\lambda\}$ 的全体称为弗晰集 $\underset{\sim}{A}$ 的不定图象，它们给出了 $\underset{\sim}{A}$ 的图象. 此处 A_λ 的含义为：等级不小于 λ 的元素的全体.

定义 2 弗晰集 $\underset{\sim}{A}$ 称为含于弗晰集 $\underset{\sim}{B}$ 中（或 $\underset{\sim}{B}$ 包含 $\underset{\sim}{A}$），如果对一切 $u\in U$，均有

$$\underset{\sim}{A}(u)\leqslant\underset{\sim}{B}(u).$$

我们把这关系记成 $\underset{\sim}{A}\subset\underset{\sim}{B}$. 如果 $\underset{\sim}{A}\subset\underset{\sim}{B}$，而且 $\underset{\sim}{A}\supset\underset{\sim}{B}$，则称 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 相等，记成 $\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}$.

三、弗晰集之间的运算

弗晰集之间也有类似于集合之间的一些运算：

1. 两个弗晰集 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的并

设 $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$ 的等级函数分别为 $\underset{\sim}{A}(u)$, $\underset{\sim}{B}(u)$（$u\in U$, $0\leqslant\underset{\sim}{A}(u)$, $\underset{\sim}{B}(u)\leqslant 1$），而且假定 $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$ 分别代表“年轻”与“年老”两个弗晰集. 直观上，并集应该是“年轻或年老”. 若某人（用 u_0 代表他，他属于论域）为“年轻”和“年老”的资格分别为 80% 和 60%（即 $\underset{\sim}{A}(u_0)=80\%$, $\underset{\sim}{B}(u_0)=60\%$），那末我们自然地可认为他“年轻或年老”的资格为 80%. 一般地，若 u“年轻”和“年老”的资格分别为 $\underset{\sim}{A}(u)$ 和 $\underset{\sim}{B}(u)$，那末他“年轻或年老”的资格应为 $\underset{\sim}{A}(u)$, $\underset{\sim}{B}(u)$ 中的较大者.

从上面这个例子我们可以总结出如下的定义：

定义 3 若弗晰集

$$\underset{\sim}{A}=\{(u,\underset{\sim}{A}(u))\,|\,u\in U,\ 0\leqslant\underset{\sim}{A}(u)\leqslant 1\},$$
$$\underset{\sim}{B}=\{(u,\underset{\sim}{B}(u))\,|\,u\in U,\ 0\leqslant\underset{\sim}{B}(u)\leqslant 1\}.$$

$$\{\max(\underset{\sim}{A}(u),\ \underset{\sim}{B}(u))\,|\,u\in U,\ 0\leqslant\underset{\sim}{A}(u),\ \underset{\sim}{B}(u)\leqslant 1\}$$

称为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的弗晰并集，记成 $\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$. 因此其等级函数为

$$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})(u)=\max(\underset{\sim}{A}(u),\ \underset{\sim}{B}(u)).$$

(这里记号 $\max(x,\ y)$ 表示 x, y 两数中较大的一个.) 以上定义亦即：若

$$\underset{\sim}{A}=\begin{Bmatrix}1, & 2, & \cdots, & n\\ \underset{\sim}{A}(1), & \underset{\sim}{A}(2), & \cdots, & \underset{\sim}{A}(n)\end{Bmatrix},$$

$$\underset{\sim}{B}=\begin{Bmatrix}1, & 2, & \cdots, & n\\ \underset{\sim}{B}(1), & \underset{\sim}{B}(2), & \cdots, & \underset{\sim}{B}(n)\end{Bmatrix}.$$

那末定义 $\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$ 如下：

$$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\begin{Bmatrix}1, & \cdots, & n\\ \max(\underset{\sim}{A}(1),\underset{\sim}{B}(1)), & \cdots, & \max(\underset{\sim}{A}(n),\ \underset{\sim}{B}(n))\end{Bmatrix}.$$

2. 两个弗晰集 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的交

假定对同一个论域(全集)U 有两个弗晰(子)集 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$，它们代表的含义分别为“年轻”和“高个子”. 直观上它们的交应该是“年轻且高个子”. 若某人(用 u_0 代表他, $u_0\in U$) 为“年轻”及“高个子”的资格分别为 50% 及 30%，那末我们自然地认为他为“年轻且高个子”的资格是 30%. 一般地说：若 u“年轻”和“高个子”的资格分别为 $\underset{\sim}{A}(u)$ 和 $\underset{\sim}{B}(u)$，那末他“年轻且高个子”的资格为 $\underset{\sim}{A}(u)$、$\underset{\sim}{B}(u)$ 两者中的较小者.

从这例子我们可以引出抽象的定义：

定义 4 若 $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$ 为如下的弗晰集：

$$\underset{\sim}{A}=\{(u,\underset{\sim}{A}(u))\,|\,u\in U,\ 0\leqslant\underset{\sim}{A}(u)\leqslant 1\},$$

$$\underset{\sim}{B}=\{(u,\underset{\sim}{B}(u))\,|\,u\in U,\ 0\leqslant\underset{\sim}{B}(u)\leqslant 1\}.$$

对固定的 u，若以 $\min(\underset{\sim}{A}(u),\ \underset{\sim}{B}(u))$ 表示 $\underset{\sim}{A}(u)$、$\underset{\sim}{B}(u)$ 中较小的一个，那末当 u 遍取 U 中的各个元素时，$\min(\underset{\sim}{A}(u)$,

$\underset{\sim}{B}(u)$)仍是一个等级函数,因此它对应于一个弗晰集

$$\{\min(\underset{\sim}{A}(u),\ \underset{\sim}{B}(u))\mid u\in U,\ 0\leqslant\underset{\sim}{A}(u)、\underset{\sim}{B}(u)\leqslant 1\},$$

这个弗晰集称为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的弗晰交集,记为 $\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$. 因此它的等级函数为

$$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})(u)=\min(\underset{\sim}{A}(u),\ \underset{\sim}{B}(u)).$$

以上定义也可以用另一方法来叙述:若

$$\underset{\sim}{A}=\left\{\begin{matrix}1, & \cdots, & n\\ \underset{\sim}{A}(1), & \cdots, & \underset{\sim}{A}(n)\end{matrix}\right\},\quad \underset{\sim}{B}=\left\{\begin{matrix}1, & \cdots, & n\\ \underset{\sim}{B}(1), & \cdots, & \underset{\sim}{B}(n)\end{matrix}\right\}.$$

则定义

$$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\left\{\begin{matrix}1, & \cdots, & n\\ \min(\underset{\sim}{A}(1),\underset{\sim}{B}(1)), & \cdots, & \min(\underset{\sim}{A}(n),\ \underset{\sim}{B}(n))\end{matrix}\right\}.$$

3. 一个弗晰集 $\underset{\sim}{A}$ 的"补"

设 $\underset{\sim}{A}$ 含义为"年轻",那末直观上它的"补"应为"不年轻". 如果某人"年轻"的资格为40%,我们自然地可认为他"不年轻"的资格为60%. 一般地,某人(用 u 代表他)"年轻"的资格为 $\underset{\sim}{A}(u)$,那末他"不年轻"的资格应为 $1-\underset{\sim}{A}(u)$. 易见 $1-\underset{\sim}{A}(u)$ 仍是一个等级函数. 我们由此可总结出一般的定义:

定义 5 若弗晰集 $\underset{\sim}{A}$ 为

$$\underset{\sim}{A}=\{(u,\underset{\sim}{A}(u))\mid u\in U,\ 0\leqslant\underset{\sim}{A}(u)\leqslant 1\},$$

则由等级函数 $1-\underset{\sim}{A}(u)$(把它记成 $(\overline{\underset{\sim}{A}})(u)$)确定的弗晰集

$$\{(u,1-\underset{\sim}{A}(u))\mid u\in U,\ 0\leqslant\underset{\sim}{A}(u)\leqslant 1\}$$

称为 $\underset{\sim}{A}$ 的弗晰补集,记成 $\overline{\underset{\sim}{A}}$(有些书上记成 $\underset{\sim}{A}^c$).

以上定义等价于下述说法:若

$$\underset{\sim}{A}=\left\{\begin{matrix}1, & \cdots, & n\\ \underset{\sim}{A}(1), & \cdots, & \underset{\sim}{A}(n)\end{matrix}\right\},$$

则
$$\overline{\underset{\sim}{A}}=\left\{\begin{matrix}1, & 2, & \cdots, & n\\ 1-\underset{\sim}{A}(1), & 1-\underset{\sim}{A}(2), & \cdots, & 1-\underset{\sim}{A}(n)\end{matrix}\right\}.$$

应特别指出：全集U与空集$\emptyset$也分别是一种特殊的弗晰集，其等级函数分别为常数1和0，即

$$\underset{\sim}{U}=\{\underset{\sim}{U}(u)=1|u\in U\},$$
$$\underset{\sim}{\emptyset}=\{\underset{\sim}{\emptyset}(u)=0|u\in U\}.$$

弗晰集的运算几乎具有通常集合运算的一切规律（但是它不满足互补律 $\underset{\sim}{A}\cap\bar{\underset{\sim}{A}}\neq\underset{\sim}{\emptyset}$；而通常集的运算是满足互补律 $A\cap\bar{A}=\emptyset$ 的）：

幂等律　$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$；

交换律　$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{A}$；

结合律　$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cup\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C})$，
$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cap\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cap(\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C})$；

分配律

$\underset{\sim}{A}\cap(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C})=(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cup(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{C})$（第一分配律），

$\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C})=(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cap(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{C})$（第二分配律）；

吸收律　$\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})=\underset{\sim}{A}$，　$\underset{\sim}{A}\cap(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})=\underset{\sim}{A}$；

复原律　$\bar{\bar{\underset{\sim}{A}}}=\underset{\sim}{A}$；

对偶公式　$\overline{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}=\bar{\underset{\sim}{A}}\cap\bar{\underset{\sim}{B}}$，$\overline{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}=\bar{\underset{\sim}{A}}\cup\bar{\underset{\sim}{B}}$.

由上面的叙述可以看到：要给定弗晰集就需要给出等级函数，有了等级函数以后，弗晰集及其运算规律就完全清楚了．但是并没有给出等级函数的统一方法，而只能总结出一些与经验符合的等级函数．下面列举几个作为给出具体的弗晰集的例子．

【例1】 若全集（论域）为全体三角形，每个三角形有三个内角A，B，C，按大小次序命名：$A\geqslant B\geqslant C\geqslant 0$．两个彼此相似的三角形不加以区分．因此，全集中的每个元素u相当于三个角：

$$u=(A,\ B,\ C)$$

$(A\geqslant B\geqslant C\geqslant 0$; A, B, C 的单位为度, $A+B+C=180)$. 于是论域(全集)为

$$U=\{(A,\ B,\ C)\mid A+B+C=180,\ A\geqslant B\geqslant C\geqslant 0\},$$

那末

1) 等级函数

$$\underset{\sim}{E}(u)=1-\frac{A-C}{180}\text{(其中 }u=(A,\ B,\ C)\in U\text{)}$$

代表一个表达"近似正三角形"的弗晰集 $\underset{\sim}{E}$.

2) 等级函数

$$\underset{\sim}{R}(u)=1-\frac{|A-90|}{90}\quad\text{(其中 }u=(A,\ B,\ C)\in U\text{)}$$

代表一个表达"近似直角三角形"的弗晰集 $\underset{\sim}{R}$.

3) 等级函数

$$\underset{\sim}{I}(u)=1-\frac{\min(A-B,\ B-C)}{60}\quad(u=(A,\ B,\ C)\in U)$$

代表一个表达"近似等腰三角形"的弗晰集 $\underset{\sim}{I}$.

4) 由下面等式定义的 $\underset{\sim}{A}$:

$$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{I}\cap\underset{\sim}{R}$$

代表一个表达"近似等腰直角三角形"的弗晰集.

5) 由下面等式定义的 $\underset{\sim}{B}$:

$$\underset{\sim}{B}=\overline{\underset{\sim}{I}\cup\underset{\sim}{R}\cup\underset{\sim}{E}}$$

代表一个表达"非特殊三角形"的弗晰集.

【例 2】 若全集(论域)为

$$U=\left\{(l,\ S)\mid 0\leqslant l,\ 0\leqslant S\leqslant\frac{l^2}{4\pi}\right\},$$

其中 $(l,\ S)$ 代表平面上的一个封闭图形, l 代表它的周长, S 代表它的面积. 那末等级函数

$$\underset{\sim}{A}(u)=\frac{4\pi S}{l^2}\quad (其中\ u=(l,\ S)\in U)$$

代表一个表达"圆乎乎的图形"的弗晰集 $\underset{\sim}{A}$.

四、弗晰分类原则

本段扼要地叙述一下弗晰分类原则：如果在论域 U 上有 n 个弗晰(子)集 $\underset{\sim}{A}_1, \cdots, \underset{\sim}{A}_n$. 今有一个元素（或称对象）$u_0\in U$. 问 u_0 与 $\underset{\sim}{A}_1, \cdots, \underset{\sim}{A}_n$ 中哪一个最"接近"？或者说，近似地认为 u_0 具有 $\underset{\sim}{A}_1, \cdots, \underset{\sim}{A}_n$ 中哪一个的特性最为合适？例如在平面上给定了一个三角形，这就相当于在例1的全集(论域)U 中给定了一个元素 u_0:

$$u_0=(A_0, B_0, C_0),\ (A_0+B_0+C_0=180,\ A_0\geqslant B_0\geqslant C_0\geqslant 0),$$

问它属于下列五类中哪一类更合适：(1)近似正三角形，(2)近似直角三角形，(3)近似等腰三角形，(4)近似等腰直角三角形，(5)非特殊三角形.

由例1知：这五类分别对应于五个弗晰集 $\underset{\sim}{E}, \underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{I}, \underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}$. 我们看五个数 $\underset{\sim}{E}(u_0)$, $\underset{\sim}{R}(u_0)$, $\underset{\sim}{I}(u_0)$, $\underset{\sim}{A}(u_0)$, $\underset{\sim}{B}(u_0)$ 中哪一个最大，就认为 u_0 具有(1)至(5)中对应的那一种的性质最为合适.

所以，对一般的 $\underset{\sim}{A}_1, \cdots, \underset{\sim}{A}_n$, 如果有某个 i_0, 使 $\underset{\sim}{A}_{i_0}(u_0)$ 在 $\underset{\sim}{A}_1(u_0), \cdots, \underset{\sim}{A}_n(u_0)$ 中最大，那末我们就认为 u_0 近似地具有 $\underset{\sim}{A}_{i_0}$ 那种性质最合适.

第二章

逻辑

第一节 电路中的逻辑——开与关(通与断)

在电路中，我们常常遇到如下的一些问题：

【例1】 如图 2-1 中的一段电路能否化简?

(注 用虚线连结的两个 A 合起来表示一个双刀二掷开关. 化简电路包括少用开关，或用简单开关代替复杂开关，减少接线…等等).

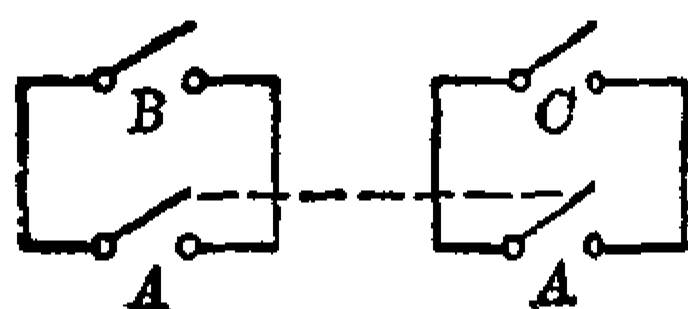


图 2-1

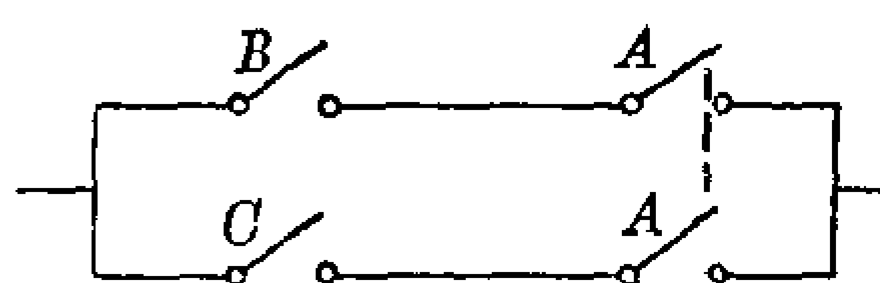


图 2-2

【例2】 图 2-2 中的一段电路能否化简?

【例3】 楼梯上有一盏电灯，问应该如何设计电路以使楼上与楼下均能自由开关它?

为了解决上述的一些简单问题，我们需要考虑与电路有关的简单逻辑问题.

先看一个简单开关 A (图 2-3)，它有两种状态：通和断. 它们分别对应于图上的两点 x、y 是接通的还是切断的.

利用第一章第四节注 (2) 中的想法，我们可以由开关 A

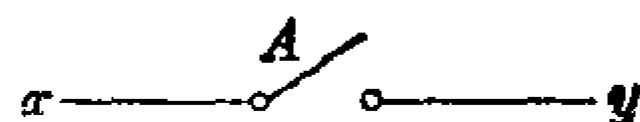


图 2-3

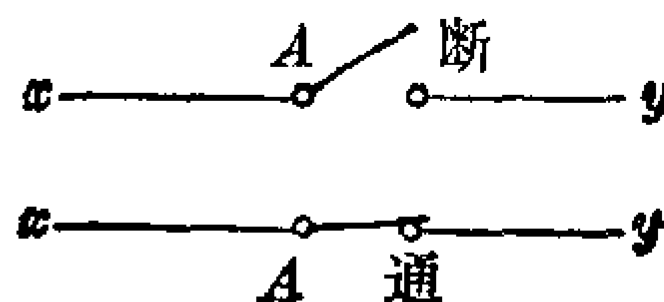


图 2-4

得到一个“事件”，这个事件就是“x 与 y 两点是接通的”. 我们仍以 A 记这个事件. 那末其对立事件 $\overline{A}$ 则为“x 与 y 两点是切断的”(图 2-4).

对于两个开关 A、B 而言，它们分别对应于事件 A、B (注意：我们故意用一个记号 A 代表开关及其对应的事件)，下面来分析事件 $A\cup B$ 与 $A\cap B$ 分别在电路中的含义：

事件 $A\cup B$ 表示“或 A 通或 B 通”，因此事件 $A\cup B$ 的发生等价于 A 与 B 之一是通的. 这说明了事件 $A\cup B$ 对应于开关 A、B 并联所得的电路(图 2-5).

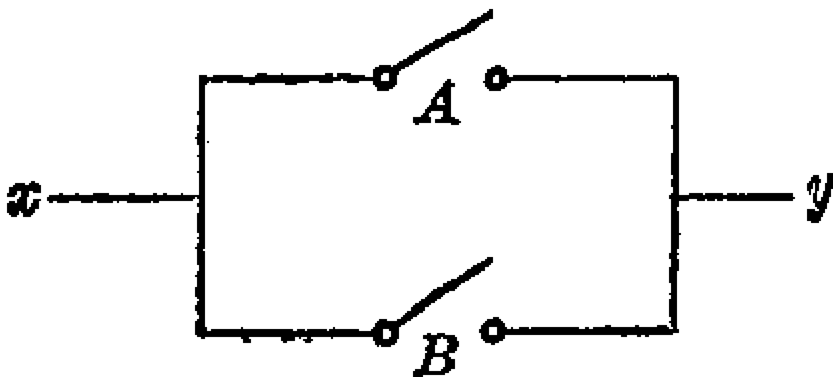


图 2-5



图 2-6

事件 $A\cap B$ 表示“A、B 都通”，因此事件 $A\cap B$ 的发生等价于 A、B 都接通. 于是事件 $A\cap B$ 对应于开关 A、B 串联所得的电路(图 2-6).

于是得到下述的通断“状态”表：

开关 A	开关 B	“复杂”开关 $A\cup B$
通	通	通
通	断	通
断	通	通
断	断	断

(1.1)

及

开关 A	开关 B	“复杂”开关 $A\cap B$
通	通	通
通	断	断
断	通	断
断	断	断

(1.2)

此外，由开关 A 可以得到一个与 A 的通断状态完全相反的新开关 $\bar{A}$（图 2-7）.

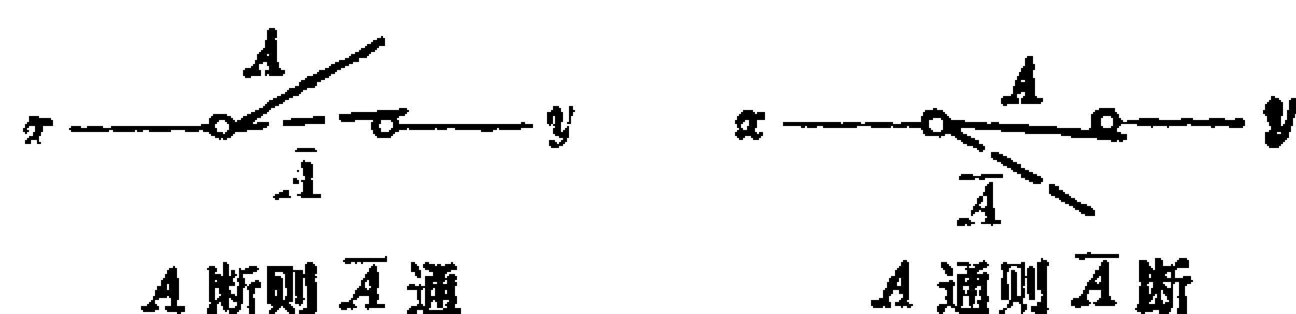


图 2-7

由开关 A、B 可得复杂的新开关 $A\cup B$ 及 $A\cap B$ 不再是简单的开关了，但它们都只有通断两种状态，客观效果对应于开和关，因此仍称它们为开关，其通断状态恰好分别对应于把开关 A 和 B 并联及串联所得的电路．其具体算法为上面对应于 $A\cup B$ 及 $A\cap B$ 的通断表(1.1)及(1.2).

注意 一个开关只有通断两种状态，翻转一次开关就是变更一次状态：由通变为断，或由断变为通.

通断表也可称为真假表，也就是说，可以分别用真、假两字来代替通、断两字.

为了在数学上便于计算和记忆，我们把状态"通"叫做状态"1"，状态"断"叫做状态"0"，并把这个"1"、"0"叫做开关的逻辑值．于是通断表就可写成开关运算的逻辑值计算表：

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

A	B	$A\cup B$	$A\cap B$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

(1.3)

即

$$\bar{1}=0,\qquad \bar{0}=1,$$

$$1\cup 1=1,\ 1\cup 0=1,\ 0\cup 1=1,\ 0\cup 0=0,$$

$$1\cap 1=1,\ 1\cap 0=0,\ 0\cap 1=0,\ 0\cap 0=0.$$

这样的 0、1 两个数在运算“$\cup$, $\cap$, $-$”下的结构称为布尔代数，$\cup$ 叫逻辑加，$\cap$ 叫逻辑乘[事实上 $a\cup b=\max(a, b)$，$a\cap b=\min(a, b)$]．

从上面的讨论可知，由两个开关组成的电路常常可以当作一个新开关，这个新开关的通断由它的逻辑值是 1 还是 0 所决定．

一般带有复杂开关的电路，也常常相当于一个新开关，它由有限个简单开关(或多刀开关)所组成．这个电路的通断由这个新开关的逻辑值是 1 还是 0 所决定．

现在我们把前面的例 3 作为一个应用的例子，讨论一下它的解法：

设楼下的开关为 A，楼上的开关为 B，应如何接入电路中才能达到预定的要求呢？

我们设想 A, B 已按某种办法接入电路，并且电路能满足我们的要求：楼上楼下均能自由地开关楼梯上的电灯．那末这个电路就是一个新的开关．如果把这新开关记成 P，则 P 就与 A、B 都有关．P 通，即电灯亮；P 断，即电灯灭．既然楼下楼上都能自由控制这电灯的亮与灭，这说明开关 A 翻转一次就必然引起 P 翻转一次，而且 B 翻转一次也必引起 P 翻转一次．于是这个电路的设计问题就变成了：从 A、B 要经过 $\cup$、$\cap$、$-$ 三种运算，构造一个新开关 P，使 A、B 中固定一个，翻转另一个时，开关 P 也恰好翻转一次．为此，我们在下面先写出满足上面要求的开关 P 的可能的通断表（真假表）（在 $A=B=1$ 时，可以按 P 的可能取值分两种情况）如下：

情况 1) 设 $A=B=1$ 时，$P=1$

这就在下面左边的表中得到第一行：

A	B	P		A	B	P
1	1	1		1	1	1
1	0			1	0	0
0	1			0	1	0
0	0			0	0	1

(1.4)

要知道其它几行 P 的值，先看表中第二行中 $A=1$, $B=0$. 把这行与第一行相比较，看出 A 固定在状态 1 而 B 由 1 变为 0 (翻转了一次)，因为要求开关 B 能控制 P，所以 P 必须跟着翻转一次. 但是第一行中 $P=1$，因此第二行中必须 $P=0$. 再看表的第三行中 $A=0$, $B=1$. 把第三行与第一行相比较，看出 B 处在固定状态 1 而 A 由 1 变为 0 (翻转了一次)，因为要求开关 A 能控制 P，所以 P 也必须跟着翻转一次，因此第三行的 P 必须与第一行相反，即应该为 0. 类似地，由第四行与第三行比较，A 处于固定状态 0，B 翻转了一次状态，所以第四行中 P 的状态必须与第三行中相反，即应该为状态 1. 最后，我们可以看到具有如 (1.4) 中那样的一张通断表(真假表)，其中 P 确能被 A、B 分别控制. 于是可以根据上面这个表而设计开关 P 如下：由于这个表当 A、B 处在同一状态时 P 取 1；而在 A、B 处在不同状态时 P 取 0. 所以事件 P 发生等价于事件 A、B 同时发生或同时不发生. 由文氏图 2-8 可以看到 P 相当于图上的阴影部分，即

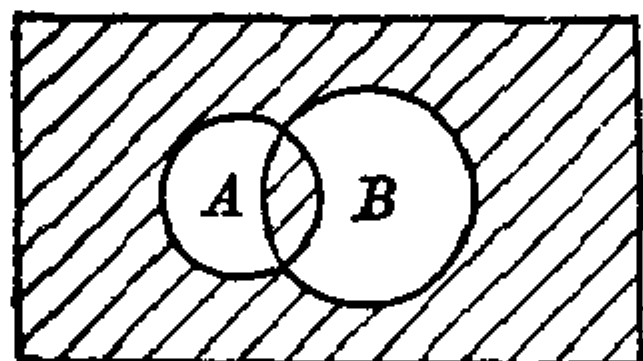


图 2-8

$$P=(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap\bar{B}).$$

情况 2) $A=B=1$ 时 $P=0$.

讨论方法与情况 1) 类似，此时通断表为

A	B	P
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(1.4′)

这时的开关 P 与情况 1) 中的开关 P 正好处于完全相反的状态，亦就是说相当于情况 1) 中开关 P 的"对立"开关 $\overline{P}$. 所以这里的 P 应为

$$P=\overline{(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})}$$

$$=\overline{(A\cap B)}\cap\overline{(\overline{A}\cap\overline{B})}\quad \text{(对偶关系)}$$

$$=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup B)\quad \text{(对偶关系)}.$$

下面我们要把已构造的 P 画成电路图:

1° $P=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$ 的电路图

这开关是"A 与 B 串联"再并联以"$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 的串联". 但是 A 与 $\overline{A}$ (同样 B 与 $\overline{B}$) 可用一个单刀双掷开关，于是画成的线路图如图 2-9.

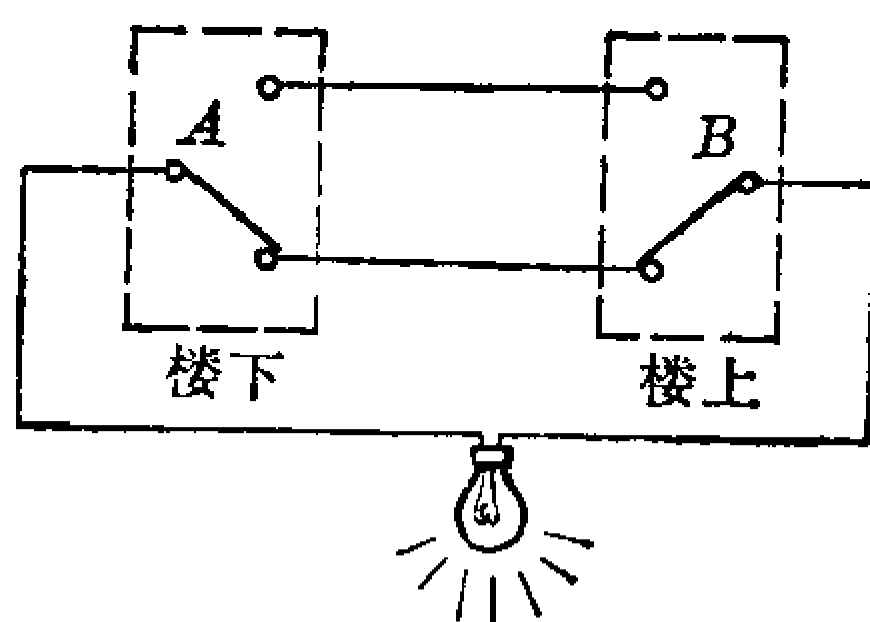


图 2-9

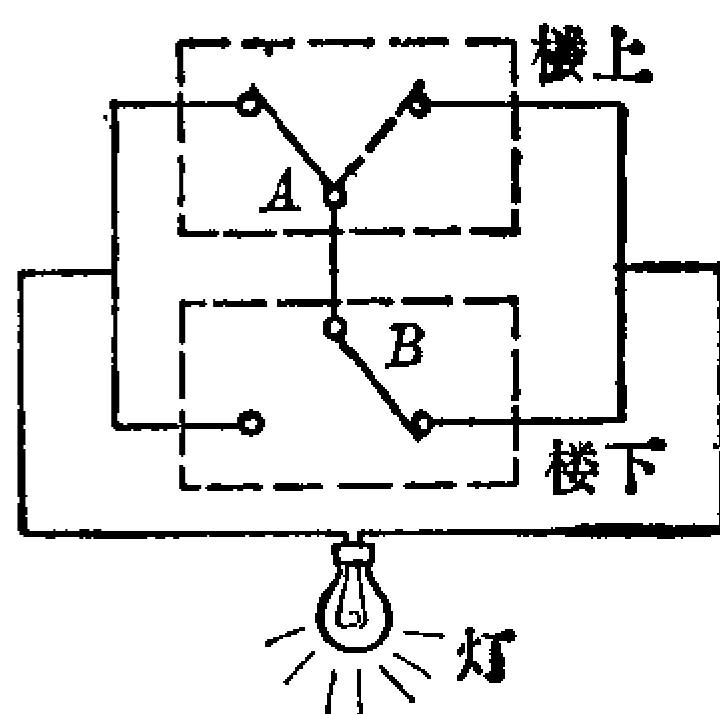


图 2-10

2° $P=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$ 的电路图

这开关是"A 与 B 并联"再串联以"$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 的并联". 与上面类似，可用一个单刀双掷开关(仍记成 A) 代替简单开关

A 及 $\overline{A}$，再用一个单刀双掷开关(仍记成 B) 代替简单开关 B 及 $\overline{B}$ 后，可得线路图如图 2-10.

对例 3 略加推广是很有意思的. 例如三个能自由控制的开关的电路：二楼有一盏灯，需要设计一个电路，使一楼、二楼、三楼都能自由地开关它.

解：设一楼、二楼、三楼各有开关 A、B、C. 我们首先单把一楼和二楼部分的电路按例 3 那样设计为一个新的复合开关 $P=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$. 这时一楼的开关 A 及二楼的开关 B 都能自由地控制它. 现在为了设计三楼也能自由控制的电路，只要把一、二楼看成为有一个开关 P 的单元，把三楼看成为另一个有一个开关 C 的单元，那末由例 3 可知：新开关 $Q\equiv(P\cap C)\cup(\overline{P}\cap\overline{C})$ 就能由 P、C 自由控制，因此也能由 A、B、C 自由控制. 于是 Q 所代表的电路就满足设计要求.

为了使上面定义的复合开关 Q 能在真实的电路中实现，我们首先要把 Q 写成形式：

$$\begin{aligned}Q&=(P\cap C)\cup(\overline{P}\cap\overline{C})\\&=\{[(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})]\cap C\}\\&\quad\cup\{[\overline{(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})}]\cap\overline{C}\}.\end{aligned}$$

这些 A、B、C 是开关，它们都可以看成"事件". 应用事件运算的对偶律及分配律就得到

$$\begin{aligned}Q&=\{[(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})]\cap C\}\\&\quad\cup\{[(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup B)]\cap\overline{C}\}\\&=\{[(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})]\cap C\}\\&\quad\cup\{[(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)]\cap\overline{C}\}.\end{aligned}$$

于是按照串联与并联及开关的关系，我们可以画出 Q 的原始

电路图如图 2-11.

但是这还不是真实的电路图，因为 A、B 开关如何通断还看不清楚。我们进一步把它画成图 2-12.

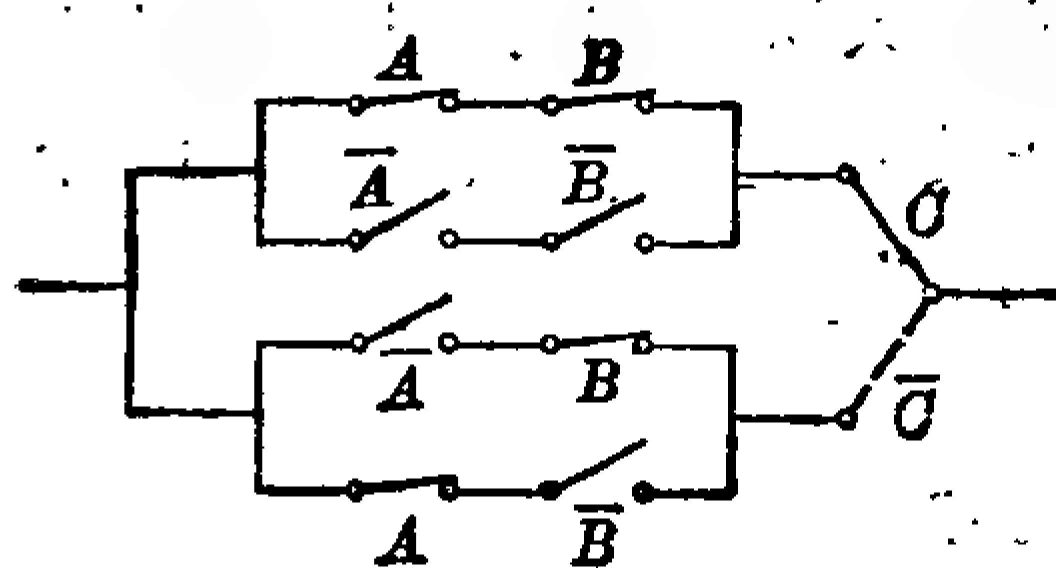


图 2-11

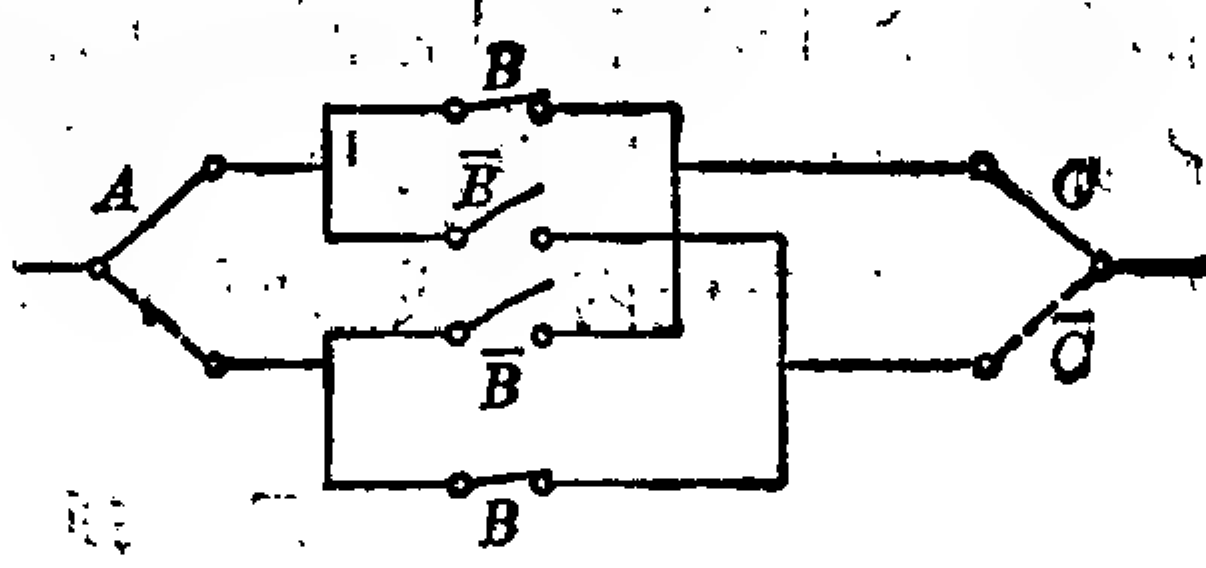


图 2-12

在这图中 B 与 $\overline{B}$ 均分别出现在两个地方，而且这两个 B 不能合成一个 B，同时这两个 $\overline{B}$ 也不能合成一个 $\overline{B}$. 这就是说开关 B 控制了四根电线，当 B 接通时就接通了其中两根（在图 2-12 中的第一、四两根）；当 $\overline{B}$ 接通时就接通了其它两根（在图 2-12 中的第二、三两根）. 也就是说 B 必须是一个双刀两掷开关. 我们把第四条线改画到第一条线下面后，线路图就改画成图 2-13. 这就是我们所要的线路.

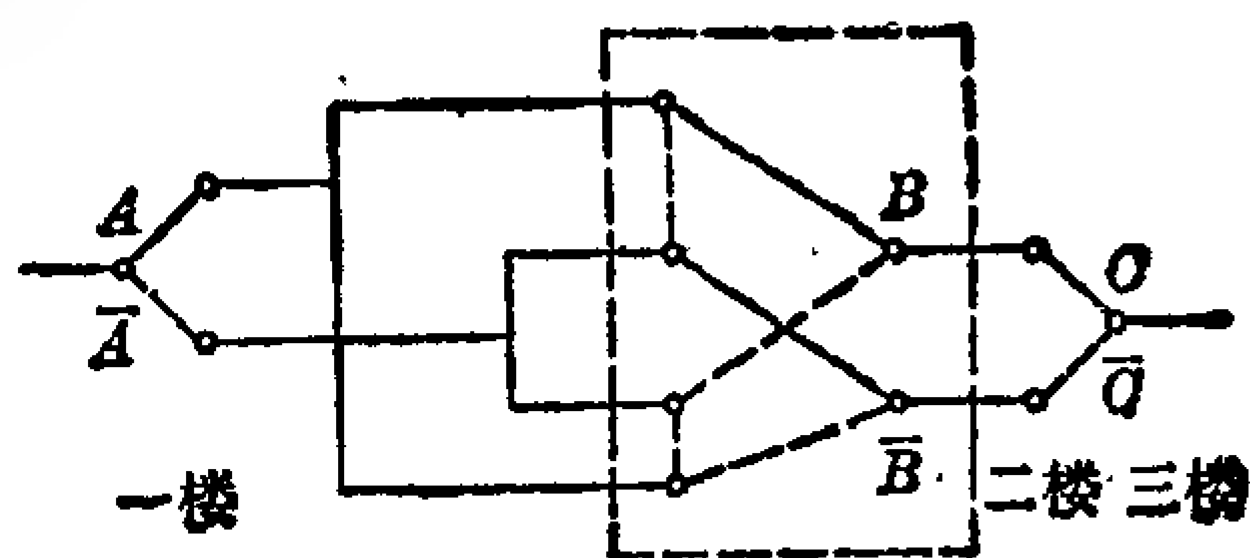


图 2-13

为了推广到设计有多个分别能自由控制的开关的电路，我们需要分析一下从例 3 的图到上面的图 2-13 到底有什么本质的变化. 事实上，我们在图 2-13 中如果略去二楼部分（即虚线框内的部分），把两条对应的线接通后所得到的线路图就恰恰是例 3 中的线路图. 反过来，在例 3 中增加一层楼后仍然还要求各层都能自由控制的电路，就相当于把原有的线路剪开后从中间插进虚线框内的那一部分而得到的线路.

不难证明：如果再要求多一个可以自由控制的开关，那末就相当于在原有的线路中再插入一个如图 2–13 中虚线框内部那样的线路．因此，如果某体育馆有六个门，而希望在六个门口都有一个开关，能用它同时打开或熄灭所有的灯，那末，这个电路应为在图 2–13 的开关 A 与开关 C 之间串联地插入四个如图 2–13 虚框内的线路而得到的电路．

习 题 2·1

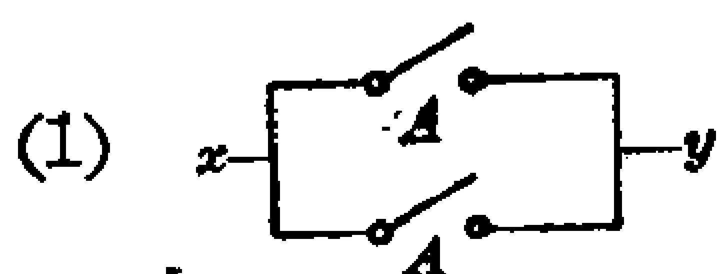
1．说明例 1 与例 2 中的双刀两掷开关 A 可用简单开关代替．

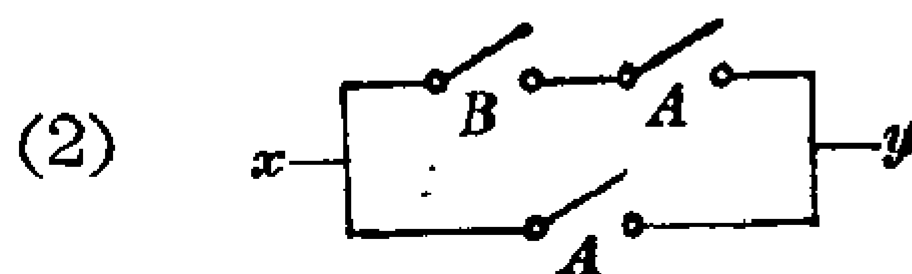
2．设 A 为开关，问 $A\cup\bar{A}$、$A\cap\bar{A}$ 在电路中是什么含义？

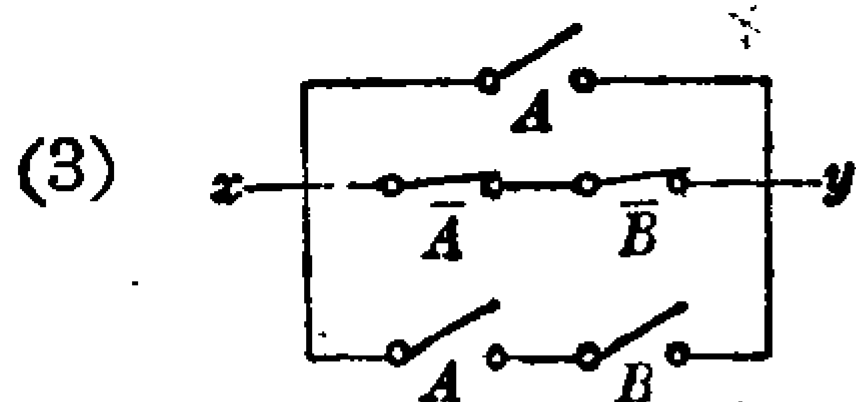
3．三人投票表决某个建议，多数赞成才能有效．今要求设计一个电路，三人分别在电路中被分配一个开关，如某人把被分配的开关接通，则表示他赞成此建议，如这建议得以通过（有效），则电路上出现一铃响．试设计这个电路（注意：要尽量简化）．

4．在第 3 题中换成四人（多数指三人以上），则电路应如何设计？

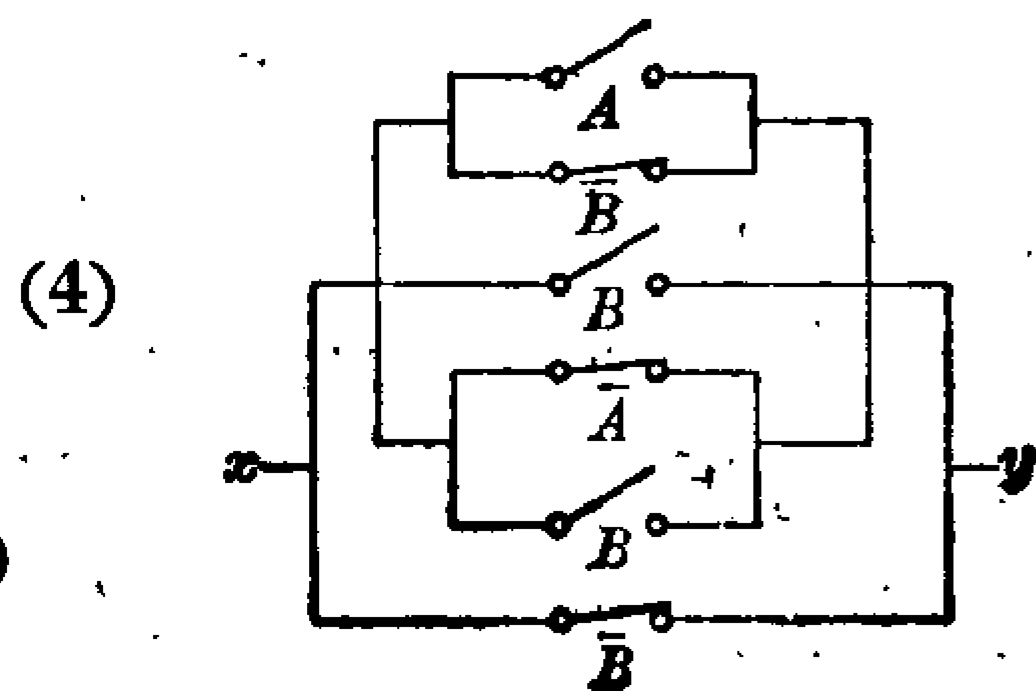
5．化简下述电路：

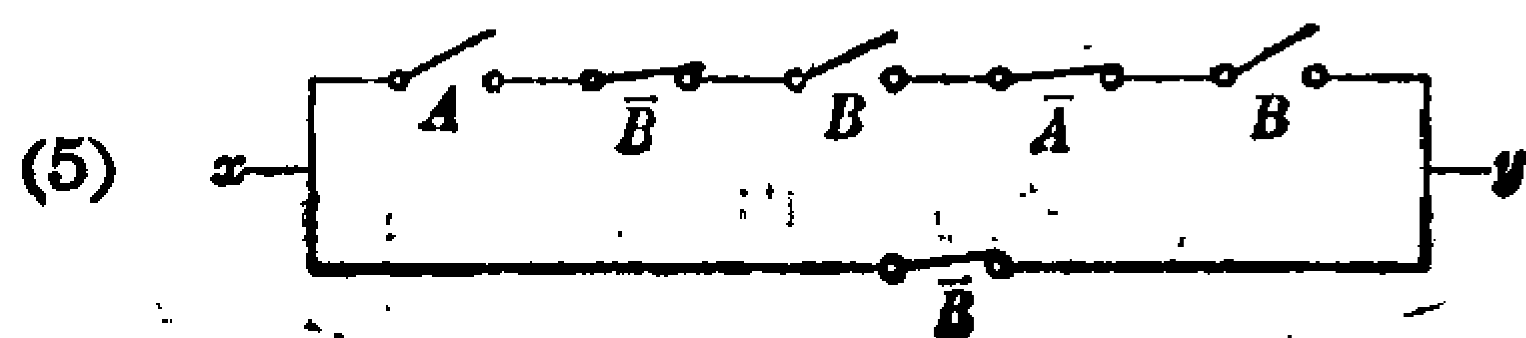
(1) 

(2) 

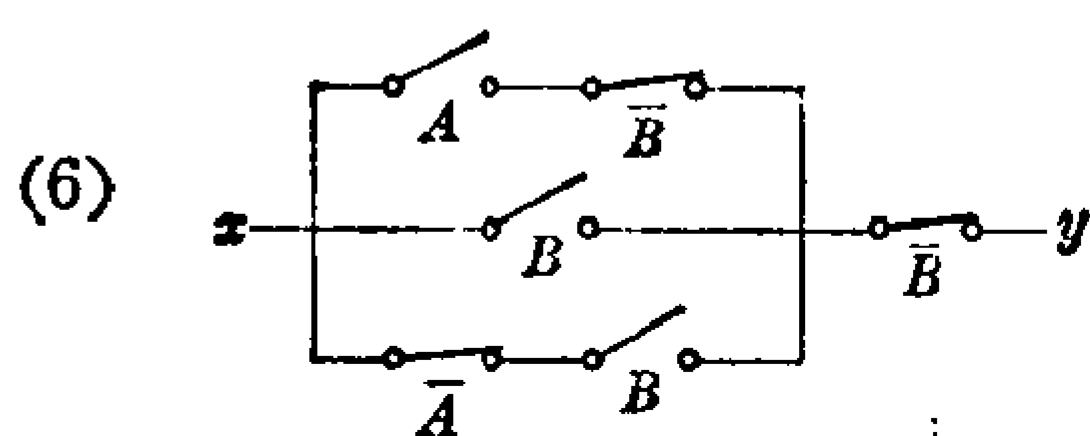
(3) 

（注意 A 与 $\bar{A}$ 状态相反）

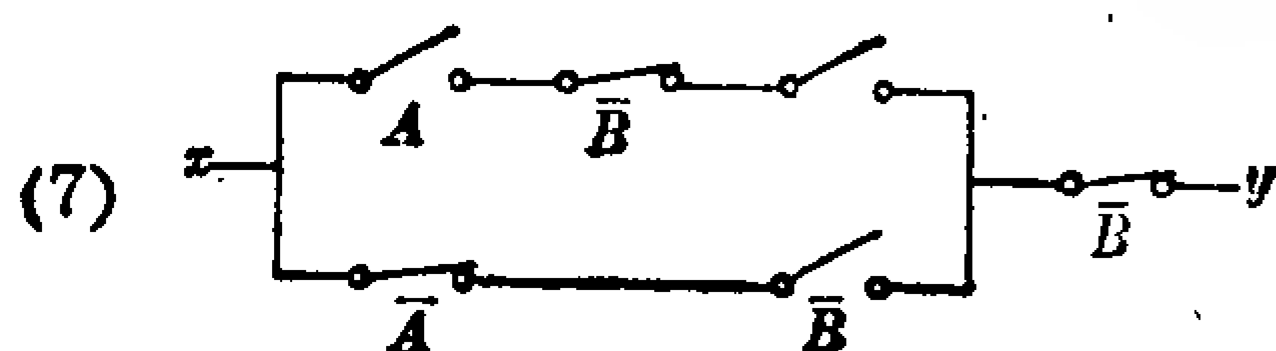
(4) 

(5) 

(6)



(7)



第二节　命题与逻辑值、复合命题

本节讨论简单的(形式)逻辑推理. 逻辑推理的一个重要内容就是判断某一句话是否正确. 一句话可以有很不相同的形式,如陈述句、命令句、问句、惊叹句等等. 在此我们只研究最简单的对象: 一部分陈述句. 我们要求它们满足下述定义的条件.

定义 1　能够简单地判断真(正确)或假(错误)的一个陈述句叫做一个**命题**(既真又伪的一个陈述句并不是一个命题,因为它不能简单地用真或假来判断). 如果一个命题中还出现其它的命题,则称前者为**复合命题**;否则,就称为**简单命题**. 一个命题若被判断为真(假)值,则称该命题**取真(假)值**.

【例 1】　下列叙述中哪些是命题?

(1) π 大于 3;

(2) $x^2=1$;

(3) 二次方程有二个复根;

(4) 二次方程有二个实根;

(5) $x^2+1=0$ 有二个实根;

(6) 小张很年轻;

(7) 这个题目很难;　　　　　(8) 不准抽烟!

(9) 你身体好吗?　　　　　(10) 他是学生;

(11) 我正在说假话;

(12) 上海的人口超过九百万;

(13) 我在学习,小王在打球;

(14) 要么小李在图书馆,要么小张在图书馆;

(15) 我和小黄都在教室里.

在上面这些句子中,(1)、(3)、(12) 是真的,(5)是假的,(13)、(14)、(15) 也是能够判别真假的,所以它们都是命题,而且是复合命题. (10)只有在"他"确指某人时才是命题. 其它的句子都不是命题,这是因为:(2)对有些 $x(x=\pm 1)$ 为真,而对另一些 x 为假,按定义 1 它不是命题;(4)比(2)更加不确定,当然也不是命题;(6)、(7) 中的"年轻"、"难"没有清晰的界限(它们是第一章附录中的弗晰概念,按那里的运算方法,我们不妨称它们为弗晰命题);(8)、(9)不是陈述句,当然不是命题;(11) 无法判断真假,因为如果这句子是真的,按句子内容:我正在说假话,既然说假话,那末我说的话(即"我正在说假话")就不是真话,因此我并未说假话,这就与句子是真的发生矛盾;如果这句子是假的,那末我并未说假话,即说的是真话,这又导致与假定句子为假相矛盾. 所以对 (11) 不能判别真假,叫做悖论,因而不是命题.

通常用小写拉丁字母如 p、q、r、… 等表示命题,个别情况下也用一个大写字母表示一个命题.

一个复合命题如何由一些简单命题得到,以及由这些简单命题的真假如何判断该复合命题的真假等等,这是我们首先会遇到的问题.

为了讨论上述问题,需要引入命题之间的运算,并且考察

这些运算满足的规律．在逻辑学中，这些"运算"称为"连结"．命题之间一共有五种基本的连结方式．在本节中将介绍其中最简单且最基本的三种："或"，"且"，"非"．

1．运算 $\vee$（记号 $\vee$ 由 $\cup$ 变来，意即"或"）

由命题 p 及命题 q 可以得到一个新命题"p 或 q"，记成 $p\vee q$．例如：p 表示"今天早晨我在图书馆"，q 表示"今天早晨我在劳动"，那末 $p\vee q$ 表示"今天早晨我或在图书馆或在劳动"．又如 p 表示"昨晚我不在家"，q 表示"昨晚小王不在家"，那末 $p\vee q$ 表示"昨晚我与小王中至少有一人不在家"（或者"昨晚不是我不在家就是小王不在家"）．从上面两个例子可以看出：只要 p、q 两个命题中有一个为真话，那末 $p\vee q$ 也是真话，这是因为，若"我在图书馆"为真，那末"我在图书馆或在劳动"当然也是真话；又若"我在劳动"为真，那末"我在图书馆或在劳动"显然也是真话．只有当"我在图书馆"及"我在劳动"都假时（即我既不在图书馆又不在劳动），"我在图书馆或在劳动"这句话才是假话．这说明只有 p、q 均假时，$p\vee q$ 才是假的．从而我们得到 $p\vee q$ 的真假表如下：

p	q	$p\vee q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

(2.1)

一个命题的真假表与第一节中一个开关的通断表类似．也可以用"1"代表真；用"0"代表假，那末运算 $p\vee q=\max(p, q)$，其中

$$p=\begin{cases}1, & p\text{ 真};\\ 0, & p\text{ 假}.\end{cases}\qquad q=\begin{cases}1, & q\text{ 真};\\ 0, & q\text{ 假}.\end{cases}$$

(记号 $\vee$ 在逻辑中又叫“析取”).

2. 运算 $\wedge$ (记号 $\wedge$ 由 $\cap$ 变来,意即“且”,“与”)

由命题 p 及命题 q 可以得到另一个新命题“p 与 q”,记成 $p\wedge q$. 例如 p 表示“今天早晨我在图书馆”,q 表示“今天早晨我在劳动”,那末 $p\wedge q$ 表示“今天早晨我在图书馆中劳动”(既在图书馆又在劳动). 所以只有当 p, q 都是真话时,$p\wedge q$ 才是真话. 因为如果 p, q 中有一个是假话,例如 p 为假话时(即今天早晨我不在图书馆),显然“今天早晨我在图书馆劳动”是一句假话. 因此我们得到 $p\wedge q$ 的真假表如下:

p	q	$p\wedge q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

(2.2)

($\wedge$ 在逻辑学中又称合取).

3. 运算 $\sim$ (记号 $\sim$ 由“$-$”变来,意即“非”)

由命题 p 可以得到新命题非 p, 记成 $\sim p$. 它是命题 p 的否命题(对立命题). 例如 p 表示“今天早晨我在图书馆”,那末,$\sim p$ 表示“今天早晨我不在图书馆”. 由此可知 $\sim p$ 与 p 的真假恰恰相反,故 $\sim p$ 的真假表为

p	$\sim p$
真	假
假	真

(2.3)

由定义知,$\sim\sim p$ 与 p 是一样的.

以后我们恒用 1-0 表代替真假表:

p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

p	$\tilde{p}$
1	0
0	1

(2.4)

对于运算"～"需要特别注意两点:

1° 在有 ∧、∨、～ 的命题式子中,应先算～,后算∧和∨;

2° 如果命题 p 的句子中还有修饰词"某些"、"存在"、"一切"、"每一个"、"所有"、"任何一个"时,作否定时需注意:"某些"的否定是"一切都不"("某些"、"存在"含义一样;"一切"、"每一个"、"所有"、"任何一个"含义也一样).所以若 p 表示"我们班上有些人不在图书馆",那末 $\sim p$ 表示"我们班上所有人都在图书馆".又如,p 表示"我家里的人都爱贝多芬的音乐",那末 $\sim p$ 表示"我家有的人不爱贝多芬的音乐"(要否定"都爱"只需举出有一个不爱的人即可),$\sim p$ 绝不是"我家里的人都不爱贝多芬的音乐".

【例 2】 若 p 表示"天在下雨",q 表示"小张在骑车".那末

$\sim p\vee q$ 表示"天不在下雨,或小张在骑车".

$\sim p\wedge\sim q$ 表示"天不在下雨,小张未骑车".

$\sim(p\vee\sim q)$ 表示"'天下雨或小张未骑车'不对".

$\sim(\sim p\vee\sim q)$ 表示"'天不下雨或小张未骑车'不对".

在本章讨论的逻辑中,一个命题 p 必能且只能取 1(真)、0(假)两个值之一,所以这种逻辑也称两值逻辑.

定义 2 由一些命题 p、q、r、… 等等通过 ∨、∧、～ 等的多次运算,得到的一个新命题称为一个公式. 一个公式取

真、假(即1、0)值的表称为公式的真假表.

【例3】 求 $(p\vee\sim q)\wedge(q\vee\sim p)$ 的真假表.

解：把 $\sim p$, $\sim q$, $(p\vee\sim q)$, $(q\vee\sim p)$ 作为中间对象，利用(2.4)逐步列出下面的表：

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\vee\sim q$	$q\vee\sim p$	$(p\vee\sim q)\wedge(q\vee\sim p)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1

(2.5)

所以 $(p\vee\sim q)\wedge(q\vee\sim p)$ 的真假表为：

p	q	$(p\vee\sim q)\wedge(q\vee\sim p)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

(2.6)

反过来，我们也可以根据已给的真假表来构造复合命题.

基本的办法是利用 $p\vee q$, $p\wedge q$, $\sim p\vee q$ 的真假表($\sim p\vee q$ 的真假表已在(2.5)第六列中给出)：

p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$	$\sim p\vee q$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

(2.7)

由(2.7)可以看到有：

(P_1) $p_1\vee\cdots\vee p_n=0$ 等价于一切 $p_i=0(i=1,\ \cdots,\ n)$;

(P_2) $p_1\wedge\cdots\wedge p_n=1$ 等价于一切 $p_i=1(i=1,\ \cdots,\ n)$;

(P_3) $\sim p\vee q=0$ 等价于 $p=1,\ q=0$.

利用这些结论，就可以构造具有已知真假表的复合命题了.

【例 4】 构造由简单命题 p、q、r 组成的一个复合命题 S，使它有如下的真假表:

p	q	r	S	S_1	$\sim S$
1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0

我们的办法是：先构造一些辅助命题 S_1，…，S_8，使 S_1 在第一行的值为 0，在其它行的值均为 1（一般地，命题 S_i 在第 i 行的值为 0，而在其它行的值均为 1）. 假若这些 S_1，…，S_8 均已构造好了，进一步看要构造的命题 S 在哪几行为 0（例如在例 4 中，S 在第 1、3、4、5、7 行为 0）. 一般地说，如果 S 只在第 i_1 行、第 i_2 行、…、第 i_l 行为 0，那末由 (p_2) 可知：命题 $S_{i_1}\wedge S_{i_2}\wedge\cdots\wedge S_{i_l}$ 也只在第 i_1 行、第 i_2 行、…、第 i_l 行为 0，因此，$S_{i_1}\wedge S_{i_2}\wedge\cdots\wedge S_{i_l}$ 就是我们所需要的一个命题，即它符合预先给定的真假表.

在 $l>4$ 时，作法还可以稍微简化一些. 例如可以先作出一个其真假表与 S 的真假表完全相反的命题，然后再求它的"非"(否命题).

现在把这些原则用到具体的例子(例 4) 中去. 在这个例子中的 S 有五行为 0，因此 $l=5$，我们可以先作出一个真假表，使其与 S 的真假表有完全相反的命题 $\sim S$. 于是要求 $\sim S$ 的第 2、6、8 行为 0，其它行均为 1. 为此首先要构造相

应于命题 $\sim S$ 的命题 S_2, S_6, S_8, 为了区别起见, 我们记为 $(\sim S)_2$、$(\sim S)_6$、$(\sim S)_8$. 它们分别只在第2、6、8行为0. 我们把 $\sim S$ 真假表的第2、6、8行列表如下:

	p	q	r	$\sim S$
第二行	1	1	0	0
第六行	0	1	0	0
第八行	0	0	0	0

命题 $(\sim S)_2$ 构造如下: 即要使当且只当 $p=1$, $q=1$, $r=0$ 同时成立时, 才有 $(\sim S)_2=0$ (而其他情况均为 $(\sim S)_2=1$). 考虑到 $p\wedge q$ 只在 $p=1$、$q=1$ 时才为1, 所以由 (P_3) 知, 可取

$$\sim(p\wedge q)\vee r \quad (\text{注意: 先算} \sim, \text{后算} \vee)$$

作为 $(\sim S)_2$. 这是因为 $\sim(p\wedge q)\vee r$ 只在 $p\wedge q=1$、$r=0$ 时才为0, 也就是它只在 $p=1$、$q=1$、$r=0$ 时才为0, 因此满足 $(\sim S)_2$ 的要求. 命题 $(\sim S)_6$ 构造如下: 要使当且只当 $p=0$、$r=0$、$q=1$ 同时成立时才有 $(\sim S)_6=0$ (其它情况均为 $(\sim S)_6=1$). 考虑到 $p\vee r$ 只在 $p=0$、$r=0$ 时才为0, 所以由 (p_3) 知, 我们可取

$$\sim q\vee(p\vee r)$$

作为 $(\sim S)_6$. 这是因为 $\sim q\vee(p\vee r)$ 当且只当在 $q=1$、$p\vee r=0$ 时才为0, 也就是它当且仅当在 $q=1$、$p=0$、$r=0$ 同时成立时才为0, 因此满足 $(\sim S)_6$ 的要求. 又由于 $\sim S$ 的第八行全为0, 所以可取 $p\vee q\vee r$ 为 $(\sim S)_8$. 最后我们可取 $(\sim S)_2\wedge(\sim S)_6\wedge(\sim S)_8$ 作为 $\sim S$, 它在且只在第2、6、8行为0. 因而满足 $\sim S$ 的要求. 因此 S 可取它的"非"(否命题), 也即可取

$$S=\sim((\sim S)_2\wedge(\sim S)_6\wedge(\sim S)_8)$$
$$=\sim[(\sim(p\wedge q)\vee r)\wedge(\sim q\vee(p\vee r))\wedge(p\vee q\vee r)].$$

由上面的分析知：S 的真假表确实与我们事先给出的真假表是一致的.

但这样构造的 S 一般说来还是比较复杂的，需要进行化简. 这就需要熟悉运算 $\vee$、$\wedge$、$\sim$ 满足的规律，这些规律我们将在下面给出.

以上例子中的事实可以推广为一个一般的定理，其构造的思路是完全一致的.

定理 1 若有 n 个命题 $p_1,\cdots,p_n$，则对于任意给定的一个 2^n 行的真假表，可以构造一个 $p_1,\cdots,p_n$ 的复合命题 S，使 S 符合已给定的真假表.

【证】 构造一个如下的命题：

设要求在 S 的真假表中，S 在而且只在第 i_1 行、第 i_2 行、…、第 i_l 行为 0，而在其它行均为 1. 又设在第 i_α 行 ($\alpha=1,2,\cdots,l$) 中，把诸命题 $p_1,\cdots,p_n$ 中恰等于 1 的那些命题重新记为 $p_{1i_\alpha},\cdots,p_{m_\alpha i_\alpha}$；把恰等于 0 的那些命题重新记为 $q_{1i_\alpha},\cdots,q_{n-m_\alpha,i_\alpha}$. 即只看真假表中的第 i_α 行，在这行中重排 $p_1,\cdots,p_n$ 的次序后就成为

p_{1i_α}	…	$p_{m_\alpha i_\alpha}$	q_{1i_α}	…	q_{n-m_α,i_α}	s_{i_α}
1	…	1	0	…	0	0

令

$$S_{i_\alpha}=\sim(p_{1i_\alpha}\wedge\cdots\wedge p_{m_\alpha i_\alpha})\vee(q_{1i_\alpha}\vee\cdots\vee q_{n-m_\alpha,i_\alpha}).$$

由 (P_3) 知 S_{i_α} 在而且只在 $p_{1i_\alpha}\wedge\cdots\wedge p_{m_\alpha i_\alpha}=1$，$q_{1i_\alpha}\vee\cdots\vee q_{n-m_\alpha,i_\alpha}=1$ 时才为 0，也就是说在而且只在 $p_{1i_\alpha}=1,\cdots,p_{m_\alpha i_\alpha}=1$，$q_{1i_\alpha}=0,\cdots,q_{n-m_\alpha,i_\alpha}=0$ 同时成立时才为 0. 再令

$$S=S_{i_1}\wedge\cdots\wedge S_{i_l},$$

于是 S 在而且只在第 i_1 行、第 i_2 行、…、第 i_l 行才为0. 因此 S 恰具有我们事先给定的真假表.]

*【例 5】 甲手里有一个围棋子，要乙来猜棋子的颜色是白的还是黑的. 猜的办法是：只允许乙问一个回答为"是"或"否"的问题. 甲可以说真话也可以说假话（甲只答一个字："是"或"否"）. 问乙能否找到一个问题，从这问题的答案中（不管甲是否说真话）能知道甲手中棋子的颜色？

解：这问题也是一种设计复合命题的问题. 只需要给乙设计一个问题，使乙得到的回答为：

	若棋子为白色	若棋子为黑色
若甲说真话	甲回答"是"	甲回答"否"
若甲说假话	甲回答"是"	甲回答"否"

（这样，乙可根据甲的回答为"是"还是"否"来断定棋子为白还是黑）.

另一方面，因为在甲说假话时，甲心里的真实回答与口说的回答恰相反，所以对乙所问的问题，甲在心里的回答为：

	若棋子为白色	若棋子为黑色
若甲说真话	甲心里回答"是"	甲心里回答"否"
若甲说假话	甲心里回答"否"	甲心里回答"是"

令命题

p 表示"棋子为白色"；

q 表示"甲说的是真话；

S 表示"对乙问的问题，甲心里的回答为'是'".

于是应得真假表（S 的真假值是按上面表的要求给出的）为：

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
S	1	0	0	1

我们要把 S 表成 p 和 q 的复合命题.

按定理1中所述的一般的方法, S 应取

$$(\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee p).$$

这样，乙提出的问题应与 S 在逻辑上等价. 这个问题可以是:

"要么你说的是真话，要么棋子是黑的"和"要么你说的是假话，要么棋子是白的"这两句话都是真话吗?

按我们的设计，如果乙得到的回答为"是"，则棋子必为白色; 如果乙得到的回答是"否"，则棋子必是黑色.

读者不妨自己验证.

定义3 一个恒取真值(即恒取1)的公式叫做*恒真命题*，记为 $\mathbf{1}$; 一个恒取假值(即恒取0)的公式叫做*恒假命题*或*矛盾命题*，记为 $\mathbf{0}$.

例如 $p\vee\sim p$ 是恒真命题;

$p\wedge\sim p$ 是矛盾命题.

定义4 有相同真假表的两个公式称为*逻辑等价的*; 逻辑等价的命题在逻辑学中被认为是一样的; 命题 R 与 S 逻辑等价记为 $R\equiv S$.

显然有:

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{1}\vee\mathbf{1}\equiv\mathbf{1}\wedge\mathbf{1}\equiv\mathbf{1}\vee\mathbf{0}\equiv\mathbf{1}\vee p\equiv\mathbf{1},\ \mathbf{1}\wedge p\equiv p\\ \mathbf{0}\vee\mathbf{0}\equiv\mathbf{0}\wedge\mathbf{0}\equiv\mathbf{1}\wedge\mathbf{0}\equiv\mathbf{0}\wedge p\equiv\mathbf{0},\ \mathbf{0}\vee p\equiv p\\ \sim\mathbf{1}\equiv\mathbf{0},\ \sim\mathbf{0}\equiv\mathbf{1},\ p\vee\sim p\equiv\mathbf{1}\ (\text{排中律})\\ p\wedge\sim p\equiv\mathbf{0}\ (\text{矛盾律})\end{array}\right\}\qquad(2.8)$$

运算 $\vee$、$\wedge$、$\sim$ 也有与事件运算 $\cup$、$\cap$、$-$ 完全类似的运算规律:

(I) $p\vee p\equiv p\wedge p\equiv p$ (幂等律)

(II) $p\vee q\equiv q\vee p,\ p\wedge q\equiv q\wedge p$ (交换律)

(III) $(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$
$(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$ (结合律)

$$
\left.\begin{array}{lll}
\text{(IV)} & p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r) & \text{(第一分配律)}\\
 & p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r) & \text{(第二分配律)}\\
\text{(V)} & p\vee(p\wedge q)\equiv p,\ p\wedge(p\vee q)=p & \text{(吸收律)}\\
\text{(VI)} & \sim\sim p\equiv p & \text{(双否定律)}\\
\text{(VII)} & \sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q & \\
 & \sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q & \text{(对偶公式)}
\end{array}\right\}(2.9)
$$

对以上公式的证明只需说明在"≡"两边的公式有相同的真假表即可，读者自己可以验证.

定义5 如果存在一些公式 $S_1, \cdots, S_n$, 其中每一个 S_i 是一些简单命题，或简单命题的否命题连续用 ∧ 运算的结果，且使

$$S\equiv S_1\vee\cdots\vee S_n.$$

则称公式 S 为第一标准形(或析取标准形)公式.

定义6 如果存在一些公式 $S_1, \cdots, S_n$, 其中每一个 S_i 是一些简单命题或简单命题的否命题连续用 ∨ 运算的结果，且使

$$S\equiv S_1\wedge\cdots\wedge S_n.$$

则称公式 S 为第二标准形(或合取标准形)公式.

利用上面关于 ∨、∧、~ 的运算规律，可以化简公式，并能导致两种标准形表示，这就是:

定理2 任何一个公式都可以化简为第一标准形，也都可以化简为第二标准形.

*【例 6】 甲说乙在说谎，乙说丙在说谎，丙说甲、乙都在说谎，问到底谁说的是真话？谁说的是谎话？

解：令 p、q、r 分别为下列各命题:

p: "甲说的是真话";

q: "乙说的是真话";

r: “丙说的是真话”.

于是:

“甲说乙在说谎”这个命题(记为 S_1) 的真假表为:

p	q	S_1 (“甲说乙在说谎”)
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

从 S 的真假表构造的命题为

$$(p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q),$$

因此,

$$\text{“甲说乙在说谎”}=(p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q).$$

[事实上并不一定非要用真假表才能构造 S, 可直接利用“甲说乙在说谎”只有两种可能情况, 一是: 乙在说谎而甲说的必是真话, 即 $p\wedge\sim q$; 另一是: 乙并未说谎而甲在胡说, 即 $\sim p\wedge q$. 两种情况显然应以“或”(即 $\vee$) 来连接.]

同理,命题

$$\text{“乙说丙在说谎”(记为 }S_2)=(q\wedge\sim r)\vee(\sim q\wedge r).$$

类似地分析,可知:命题

$$\begin{aligned}\text{“丙说甲、乙都在说谎”(记为 }S_3)=&(r\wedge\sim p\wedge\sim q)\\&\vee(\sim r\wedge p\wedge\sim q)\\&\vee(\sim r\wedge\sim p\wedge q).\end{aligned}$$

于是,“甲说乙在说谎”、“乙说丙在说谎”、“丙说甲、乙都在说谎”三句话的共同结果为

$$\begin{aligned}S_1\wedge S_2\wedge S_3=&[(p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)]\\&\wedge\{[(q\wedge\sim r)\vee(\sim q\wedge r)]\wedge[(r\wedge\sim p\wedge\sim q)\\&\vee(\sim r\wedge p\wedge\sim q)\vee(\sim r\wedge\sim p\wedge q)]\}\\\equiv&[(p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)]\wedge\{[r\wedge\sim p\wedge\sim q]\\&\vee[\sim r\wedge\sim p\wedge q]\}\equiv\sim p\wedge q\wedge\sim r\end{aligned}$$

(以上利用(2.9)的运算规律(I)～(VI)). 因此, $S_1\wedge S_2\wedge S_3$ 为真等同

于 $\sim p\wedge q\wedge\sim r$ 为真，而 $\sim p\wedge q\wedge\sim r$ 为真的含义为：甲、丙在说谎，乙说的是真话，这就是我们的结论.

上述例子如果不用上面的命题演算的方法，而直接用通常的逻辑思维分析来解，也并不复杂. 命题演算的方法看来计算稍多些，但是有明显的优点：思路简单，方法归范，适合于用机器作逻辑分析.

归纳本节要点

由一些简单命题构成的复合命题完全由它的真假表所决定. 所以我们应该注意：

1° 对给定的复合命题，要会求它的真假表，且要做到逐步熟练；下列三个复合命题的真假表是最基本的，须要熟记：

$$p\vee q,\quad p\wedge q,\quad \sim p\vee q.$$

2° 由给定的简单命题及真假表要会构造复合命题. 定理 1 给出了一个统一的办法（它也可以通过计算机实现）.

为了化简复合命题，须要熟习逻辑运算的基本规律(2.8)及(2.9). 这些运算规律同集合运算规律完全一样. 所以用画文氏图来检查逻辑等价式，是常常可行的. 另外，运用分配律时，把 $\vee$ 和 $\wedge$（或 $\wedge$ 和 $\vee$）分别想象成通常的 $\times$ 与 $+$，可以很快写出结果.

习 题 2.2

1. 下列陈述中哪些是命题？
   (1) 如果天下雪，就会影响市内交通；
   (2) 这是个好地方；
   (3) 请你帮助我；
   (4) 晚上我工作或看电视；
   (5) 小黄在学校学习数学、语文和外语；
   (6) $x^2+y^2=z^2$.

2. 叙述下列命题的否命题:

(1) 每个人都在努力工作;

(2) 吃虫的植物是存在的;

(3) 有些人会讲英语;

(4) 所有的人会讲英语.

3. 如果 p 表示"这个星期日不下雨", q 表示"我们班一起去郊游", 试写出下述诸命题的含义:

(1) $p \vee q$;　　(2) $p \wedge q$;

(3) $\sim p \vee q$;　　(4) $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$;

(5) $\sim p \vee \sim q$;　　(6) $\sim p \wedge \sim q$;

(7) $\sim p \vee q$;

(8) $\sim(\sim\sim p \wedge \sim q) \vee \sim p$.

4. 设 p="我对青霉素过敏",试用符号表示下列句子:

(1) 我对青霉素又过敏又不过敏;

(2) 我对青霉素要么过敏,要么不过敏,但不能是既过敏又不过敏;

(3) 我对青霉素不过敏;

(4) 并非我对青霉素不过敏.

5. 设 p="正在打雷"; q="正在下雨", 试用通顺的话说出下列命题:

(1) $\sim(p \wedge q)$;　　(2) $\sim p \vee \sim q$;

(3) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$;　　(4) $\sim(p \vee q)$;

(5) $\sim p \wedge \sim q$.

6. 写出下列命题的真假表:

(1) $\sim\sim p$;　　(2) $\sim p \vee \sim q$;

(3) $\sim(p \vee q)$;　　(4) $(p \wedge q) \vee r$;

(5) $(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$;　　(6) $\sim(p \vee \sim r) \wedge (q \vee \sim p)$;

(7) $[\sim p \wedge (\sim q \wedge \sim r)] \vee (p \wedge \sim q)$.

7. 证明本节(2.9)中的公式 (I)～(VII).

8. 化简下列公式:

(1) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

(2) $(p \wedge q) \vee p$;

(3) $p \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$;

(4) $\{[(p\wedge\sim q)\wedge q]\vee(\sim p\wedge q)\}\wedge\sim q$;

(5) $[(p\vee\sim q)\vee q\vee(\sim p\vee q)]\vee\sim q$;

(6) $[(p\wedge\sim q)\wedge q\wedge(\sim p\wedge q)]\vee\sim q$;

(7) $[(p\wedge\sim q)\vee q\vee(\sim p\wedge q)]\wedge\sim q$.

9. 证明：若 $p\wedge q=1$，则 $p\equiv q\equiv 1$，反之也对；

若 $p\vee q=0$，则 $p\equiv q\equiv 0$，反之也对.

10. 证明若 $p\vee q=1$，且 $p\wedge q=0$，则 $q\equiv\sim p$.

[提示：证明 $q\Rightarrow\sim p\wedge q\Rightarrow\sim p$.]

第三节 条件命题

有一类命题称为条件命题，如

【例 1】 讨论如下句子：

(1) 若小李不去医院，则小张必去医院；

(2) 如果我不在图书馆，那末我在劳动；

(3) 如果电视机降价，那末我至少买一台；

(4) 如果刮北风，北海就会结冰.

它们都是命题. 下面我们来一一分析说明之：句子(1)按通常的习惯来理解，那就是说"要么小李去医院，要么小张去医院". 如果有人告诉你："若小李不去医院，则小张必去医院". 那末，你怎样判断他说的是真话还是假话？一般说来，应该首先进行调查. 如果调查结果是"小李去了医院"，你就不能说那人向你说了假话. 在二值逻辑中，不是假话就必是真话，因此：

如果"小李去了医院"，我们就认为"若小李不去医院，则小张必去医院"是一句真话.

归纳起来可知："若小李不去医院，则小张必去医院"这句话的真假与"要么小李去医院，要么小张去医院"的真假是

一致的.

也就是说，不论"小李去医院"是否真，"小张去医院"是否真，我们总可以判别"小李不去医院，则小张必去医院"的真假，因而这是一个命题. 如果令

$$p=\text{"小李不去医院"};$$
$$q=\text{"小张去医院"}.$$

那末"小李不去医院，则小张必去医院"即是 $\sim p\vee q$，它的真假表已在第二节中求得为：

p	q	$\sim p\vee q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(3.1)

同样，句子(2)等同于"要么我在图书馆，要么我在劳动"，因此它也是一个命题.

句子(3)中"电视机降价"未必一定是事实，"我至少买一台"也未必是事实. 与(1)类似地，(3)的含义等同于"要么电视机不降价；要么我至少买一台"，也就是说，"如果电视机降价，则我至少买一台"若是一句假话，那必然是"电视机降价"了但"我一台也未买". 反之，如果是"电视机降价"了，且"我一台也未买"，那末"如果电视机降价，则我至少买一台"必是一句假话.

句子(4)与上面的句子完全类似，"刮北风"未必是事实，"北海结冰"也未必是事实. 但句子(4)如果是假话，那就必是"刮北风而北海未结冰". 反之，如果"刮北风而北海未结冰"，则句子(4)也必是假话，即(4)等意于"要么不刮北风，要么北

海结冰".

由 (1)～(4) 可总结出：对于命题 p、q，句子"若 p 则 q"是一个新命题，它的含义为"要么非 p，要么 q"，即是 $\sim p\vee q$。它有确定的真假表（即 $\sim p\vee q$ 的真假表）：

p	q	"若 p，则 q"
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(3.2)

注意 只要 p 假，则"若 p 则 q"必真。

把例 1 的内容叙述成一般的形式，就是

定义 1 对于命题 p、q，我们说"若 p 则 q"是一个命题，叫做条件命题，记成 $p\to q$，它的含义与 $\sim p\vee q$ 一样。因此真假表为：

p	q	$p\to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(3.2′)

这定义说明在条件命题 $p\to q$ 中，如果条件 p 为假，那末 $p\to q$ 恒真；如果条件 p 为真，那末 $p\to q$ 的真假需决定于结论 q 的真假。

虽然命题 $p\to q$ 不是独立的新命题（因为它就是 $\sim p\vee q$），或者说"→"不是新运算，它可以由 ～，∨ 得到，但是由于条件命题"若…则…"形式上是人们常用的语言，所以把它当作一种重要的运算加以熟悉后，在进行推理时常常是方便的。

注意 “→”也可以由～、∧得到(用对偶律)：

$$“p \to q” \equiv \sim(p \wedge \sim q).$$

条件命题“$p \to q$”的叙述方式可以有不同的语言，例如：

(1)“若 p 则 q”； (2)“当 p 时有 q”； (3)“由 p 推出 q”(或“由 p 导致 q”)； (4)“p 对 p 充分”； (5)“p 对 q 足够”； (6)“必须 q 才可能 p”； (7)“只当 q 才可能 p”； (8)“除非 q 才可能 p”； (9)“q 对 p 必要”； (10)“至少有 q 才能有 p”；等等.

甚至还可能有更多的叙述方式，但这些叙述的含义都是一样的，即都是“$p \to q$”(或者说 $\sim p \vee q$)，这里 p 叫做条件命题 $p \to q$ 的前提，q 叫做条件命题 $p \to q$ 的结论. 前五种叙述强调前提，从“前提 p 对结论 q 已足够”的含义描述 $p \to q$；后五种叙述强调结论，从“结论 q 对条件 p 是不能少的”这个含义来描述 $p \to q$.

定义 2 如果由命题 R 为真即可得到命题 S 为真，则称 R *蕴函* S，记成 $R \Rightarrow S$.

定理 1 下面四种叙述的含义是相同的：

(1) $R \Rightarrow S$ (即由 R 为真可得 S 为真).

(2) $R \wedge \sim S \equiv \mathbf{0}$.

(3) “$R \to S$”是恒真命题(即 $\sim R \vee S \equiv \mathbf{1}$)(或写成 $R \to S \equiv \mathbf{1}$).

(4) $\sim R \vee (R \wedge S) \equiv \mathbf{1}$.

【证】 (1)与(2)含义一样：(2)说明 R 与 $\sim S$ 同时为真是不可能的($R \wedge \sim S$ 恒假)，即 R 为真与 S 为假不可能同时成立，因此其含义与(1)一样.

在(2)的两边同时取～就得(3)，因此(2)与(3)含义一样.

另一方面，由

$$\mathbf{1}=\sim R\vee R=\sim R\vee[R\wedge(\sim S\vee S)]$$
$$=\sim R\vee(R\wedge S)\vee(R\wedge\sim S),$$

若(2)成立，则上面就变成(4)，所以(4)成立．相反，若(4)成立，在(4)两边取 ～，得

$$\mathbf{0}\equiv\sim[\sim R\vee(R\wedge S)]\equiv R\wedge\sim(R\wedge S)$$
$$\equiv R\wedge(\sim R\vee\sim S)$$
$$\equiv(R\wedge\sim R)\vee(R\wedge\sim S)\equiv R\wedge\sim S.$$

最后一个等式即是(2)，所以(2)成立．总起来就说明了(2)与(4)的含义是一样的．】

注1 千万不要混淆 $R\to S$ 与 $R\Rightarrow S$ 的差别，它们是全然不同的两个概念：

$R\to S$ 是由 R, S 组成的**一个复合命题**，可能为真，也可能为假；

$R\Rightarrow S$ 是 R 与 S 之间的**一种关系**（绝不是一个命题）．

但是这两个概念又是有联系的，定理 1 说明了：

$R\Rightarrow S$ 就是说“命题 $R\to S$ 恒真”．

注2 有一点习惯上的混淆，需要特别指出，就是一般数学书上定理的叙述常常是：

“定理：若 R，则 S”．

这种叙述方式是一般数学书上习惯的简略形式，此处“若 R，则 S”的实际含义并非我们这里的“$R\to S$”，而是“$R\to S$ 恒真”，按我们这里的说法，定理的行文应是

“定理：命题‘若 R，则 S’恒真（恒成立，即恒真命题）．”或写成

“定理：‘若 R，则 S’恒成立”．

用我们这节的符号，则应写成

“定理：$R\Rightarrow S$”．

因此可知，在一般数学书上习惯的写法中，略去了“恒成立”三个字，与本章中逻辑学上的写法是颠倒的．

同样，数学书上定理中习惯写的“R 是 S 的充分条件”，“S 是 R 的

必要条件”也不是指本章所定义的命题“$R\to S$”，它们的实际含义应为："R 是 S 的充分条件恒真"、"S 是 R 的必要条件恒真"，也就是 $R\Rightarrow S$.

总起来可概括为下述的表格：

术　　语	数学书上定理中的含义	逻辑书中的含义
(1) "若 R，则 S"	关系"$R\Rightarrow S$" (即"命题 $R\to S$ 恒真")	命题"$R\to S$"
(2) "R 是 S 的充分条件"		
(3) "S 是 R 的必要条件"		

注 3　外国有个别通俗的书关于逻辑部分的章节中，有时把命题 $R\to S$ 及关系 $R\Rightarrow S$ 用同一个记号表示．这样对这同一个记号必须看清它在上下文中的地位，才能弄清它在行文中的真实含义而不致混淆．这一点请读者在看参考书时要注意．

定义 3　复合命题 $(R\to S)\wedge(S\to R)$ **称为双条件命题**，记成 $R\leftrightarrow S$.

下列各种叙述的具体含义均为 $R\leftrightarrow S$：

(1) R 是 S 的充要条件．

(2) S 是 R 的充要条件．

(3) R 当且仅当 S.

(4) S 当且仅当 R.

(5) R 需且只需 S.

(6) S 需且只需 R.

定理 2　下面五种叙述的含义是相同的：

(1) $R\equiv S$（即 R 与 S 有相同的真假表）．

(2) $R\Rightarrow S$，而且 $S\Rightarrow R$（互相蕴涵）．

(3) 命题 $R\leftrightarrow S$ 是恒真命题（"$R\leftrightarrow S$"$\equiv\mathbf{1}$）．

(4) $(R\wedge\sim S)\vee(\sim R\wedge S)\equiv\mathbf{0}$（$R$，$S$ 不可能一真一假）．

(5) $(R\wedge S)\vee(\sim R\wedge\sim S)\equiv\mathbf{1}$ (R, S 只可能两真或两假).

【证】 (2) 说明 R 为真时 S 也为真，而且反过来还有：S 为真时 R 也为真. 因此 (2) 的含义等价于 R 与 S 有相同的真假表. 从而(2)与(1)的含义等价.

(3) 等价于

$$(R\to S)\wedge(S\to R)\equiv\mathbf{1}.$$

由习题 2.2 第 9 题可知：上式等价于

$$R\to S\equiv\mathbf{1}\quad 及\quad S\to R\equiv\mathbf{1}.$$

由定理 1 知，上两式等价于

$$R\Rightarrow S\quad 及\quad S\Rightarrow R.$$

所以(3)与(2)的含义是等价的.

(4) 式两边用 $R\wedge\sim S$ 去 $\vee$ 后，得到

$$(R\wedge\sim S)\vee(\sim R\wedge S)\equiv R\wedge\sim S.$$

但是由(4)式知左边的式子为 $\mathbf{0}$，因此

$$R\wedge\sim S\equiv\mathbf{0}.$$

类似地可证 $\sim R\wedge S\equiv\mathbf{0}.$

由定理 1 就得到 $R\Rightarrow S$，$S\Rightarrow R$. 所以由 (4) 可得 (2). 反之，若(2)成立，由定理 1 可得 $R\wedge\sim S\equiv\mathbf{0}$，$\sim R\wedge S\equiv\mathbf{0}$，因而(4)也成立. 这就是说，(4)与(2)是等价的.

最后，如果(5)成立，则

$$\begin{aligned}&[(R\wedge S)\vee(\sim R\wedge\sim S)]\wedge[(R\wedge\sim S)\vee(\sim R\wedge S)]\\&\equiv\mathbf{1}\wedge[(R\wedge\sim S)\vee(\sim R\wedge S)]\\&\equiv(R\wedge\sim S)\vee(\sim R\wedge S).\end{aligned}$$

但是经过直接展开验算后，得

$$\begin{aligned}&[(R\wedge S)\vee(\sim R\wedge\sim S)]\wedge[(R\wedge\sim S)\vee(\sim R\wedge S)]\\&\equiv\mathbf{0}.\end{aligned}$$

因此 $$(R\wedge\sim S)\vee(\sim R\wedge S)=\mathbf{0}.$$

此即(4)成立. 反之,若(4)成立,那末

$$\begin{aligned}\mathbf{1}&=(R\vee\sim R)\wedge(S\vee\sim S)\\&=[(R\wedge S)\vee(\sim R\wedge\sim S)]\\&\quad\vee[(R\wedge\sim S)\vee(\sim R\wedge S)]\\&=(R\wedge S)\vee(\sim R\wedge\sim S).\end{aligned}$$

所以(5)也成立.

这就是说(5)与(4)是等价的. ▌

注4 对于充分必要条件的用法,也同样存在着数学书的定理叙述中的习惯用法与逻辑学中用法的含义的差别,这就是

术语	数学书上定理中的含义	逻辑书中的含义
R 是 S 的充要条件	关系 $R=S$ 即"$R\leftrightarrow S$ 恒真" (是"'R 是 S 的充要条件'恒真"的简略形式)	命题 $R\leftrightarrow S$

为了熟悉条件命题与双条件命题,我们再举一个例子.

【例2】 设 p 表示"理论正确", q 表示"实验成功", r 表示"工程进展快",那末

(1) "若理论正确,实验成功,则工程进展快"为命题

$$(p\wedge q)\to r.$$

(2) "若工程进展快,则理论必正确,实验必成功"为命题 $r\to(p\wedge q)$.

(3) "工程进展当且仅当理论正确且实验成功时才快"为命题 $r\leftrightarrow(p\wedge q)$.

(4) "若实验成功,但理论不正确,则工程进展不快"为命题 $(\sim p\wedge q)\to(\sim r)$.

(5) "工程进展快就必然在实验成功时能推出理论正确"

为命题 $r\to(q\to p)$.

(6) $(p\wedge r)\to q$ 表示"若理论正确且工程进展快，则必然实验是成功的".

(7) $\sim r\to(\sim p\vee\sim q)$ 表示"若工程进展不快，那末要么是理论不正确，要么是实验未成功".

(8) $(p\vee q)\to r$ 表示"若理论正确或实验成功，则工程进展就快".

(9) $(p\to q)\to r$ 表示"只当在工程进展快的时候，才可能由理论正确必然导致实验成功"(或"如果理论正确导致实验成功，那就必然推出工程进展快").

(10) $r\leftrightarrow(p\leftrightarrow q)$ 表示"当且仅当由理论正确必然导致实验成功，且由实验成功必然推出理论正确时，工程进展就快".

注5 **注意** $p\to q$ 与 $q\to p$ 是不一样的；但是 $p\leftrightarrow q$ 与 $q\leftrightarrow p$ 是一样的.

条件命题有各种变形，列表如下:

条件命题	条件逆命题	条件逆否命题	条件否命题	附：条件命题的否命题（不再是条件命题）
$p\to q$	$q\to p$	$\sim q\to\sim p$	$\sim p\to\sim q$	$\sim(p\to q)$

为了分析这些命题间的逻辑等价性，我们看看它们的真假表. 利用(3.2)得

p	$\sim p$	q	$\sim q$	$p\to q$ (条件)	$q\to p$ (条件逆)	$\sim q\to\sim p$ (条件逆否)	$\sim p\to\sim q$ (条件否)
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1

(3.3)

(记住：只有 $a=1$, $b=0$ 时，才有 $(a\to b)=0$.) 由(3.3)这个表可以看出:

$p \to q$ 与它的条件逆否命题 $\sim q \to \sim p$ 有相同的真假表，即有

(VIII) $$(p \to q) \equiv (\sim q \to \sim p)^{*)} \quad (逆否律). \qquad (3.4)$$

同理，条件逆命题与条件否命题也有

$$(q \to p) \equiv (\sim p \to \sim q).$$

此外，由于 $a \to b$ 的真假表当且仅当 $a=1$、$b=0$ 时才有假值 0. 记住这个性质后，在求一些带有条件命题的复合命题的真假表时，运算就常常变得比较简捷了.

【例 3】 求 $p \leftrightarrow q$ 的真假表：

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \land (q \to p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

(3.5)

【例 4】 求 $(p \lor q) \to r$ 的真假表：

p	q	r	$p \lor q$	$(p \lor q) \to r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

需要注意的是：表中的命题 p、q、r 取值的排法规则，当命题有 p、q、r、S 四个时，应有

p：八个 1、八个 0；

q：四个 1、四个 0、四个 1、四个 0；

*) 逆否律的成立是需要加一个条件的，即 p, q 不能都是 0，否则不对.

r：两个1、两个0、…；

S：1, 0, 1, 0, ….

一般有 n 个命题 $S_1, \cdots, S_n$ 时，排法为

S_1：2^{n-1} 个1，2^{n-1} 个0；

S_2：2^{n-2} 个1，2^{n-2} 个0，2^{n-2} 个1，2^{n-2} 个0；

S_3：2^{n-3} 个1，2^{n-3} 个0，…；

…………；

S_k：2^{n-k} 个1，2^{n-k} 个0，…；

…………；

S_n：1, 0, 1, 0, ….

证明一个逻辑等价关系（逻辑恒等式），可以有不同的方法．例如

【例5】 证明

$$\text{(IX)}\qquad \{[(p\to q)\wedge(q\to r)]\to(p\to r)\}\equiv \mathbf{1}.$$

这关系也可写成

$$\text{(IX}'\text{)}\qquad (p\to q)\wedge(q\to r)\Rightarrow(p\to r)\quad\text{(传递律)}. \tag{3.6}$$

【证】 方法1：用逻辑运算的规律计算左方：

$$\begin{aligned}
&[(p\to q)\wedge(q\to r)]\to(p\to r)\\
&\quad=\sim[(\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee r)]\vee(\sim p\vee r)\\
&\quad=[\sim(\sim p\vee q)\vee\sim(\sim q\vee r)]\vee\sim p\vee r\\
&\quad=(p\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim r)\vee\sim p\vee r\\
&\quad=[(p\wedge\sim q)\vee\sim p]\vee[(q\wedge\sim r)\vee r]\\
&\quad=[\sim q\vee\sim p]\vee[q\vee r]\\
&\quad=(\sim q\vee q)\vee\sim p\vee r=\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

方法2：用计算真假表证明：

			(1)	(3)	(2)	(5)	(4)*)
p	q	r	$[(p \to q)$	$\wedge (q \to r)]$		$\to (p \to r)$	
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

*) 表上方的数字表示先后算的次序，由(5)的一列可知 $[(p\to q)\wedge(q\to r)]\to(p\to r)$ 为恒真命题。

【例 6】 某项任务需要在 A、B、C、D、E 五个人中派一些人去完成．但派人时要求受下列条件的约束：

(1) 若 A 去，则 B 必去．

(2) D、E 两人中必有人去．

(3) B、C 两人中有人去，但只能去一人．

(4) C、D 两人要么都去，要么都不去．

(5) 若 E 去，则 A、B 都去．

问应如何派人？

解：此题是 1979 年黑龙江省中学数学竞赛的试题．通过一般并不复杂的逻辑说理，就能得到本题的结论．但是在这里不用说理的方法，而是用本章的命题逻辑（符号逻辑）的方法，即先把题目要求写成一个复合命题，然后简化它．这种方法表面上看计算稍多，但是思路比说理更简单清楚．它适合于实现用机器作证明．

设出现在 (1) 至 (5) 中的命题分别记为 $S_1, \cdots, S_5$．(1) 至(5)均满足，就相当于命题 $S_1\wedge S_2\wedge S_3\wedge S_4\wedge S_5$．再令

命题 a 表示 “派 A 去”.
命题 b 表示 “派 B 去”.
命题 c 表示 “派 C 去”.
命题 d 表示 “派 D 去”.
命题 e 表示 “派 E 去”.

那末

$$S_1 \equiv a \to b \equiv \sim a \vee b.$$
$$S_2 \equiv d \vee e.$$
$$S_3 \equiv (b \wedge \sim c) \vee (\sim b \wedge c).$$
$$S_4 \equiv (c \wedge d) \vee (\sim c \wedge \sim d).$$
$$S_5 \equiv e \to (a \wedge b) \equiv \sim e \vee (a \wedge b).$$

于是

$$\begin{aligned}
&S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \wedge S_5 \\
&\equiv (S_3 \wedge S_4) \wedge (S_1 \wedge S_5) \wedge S_2 \\
&\equiv ([(b \wedge \sim c) \vee (\sim b \wedge c)] \wedge [(c \wedge d) \vee (\sim c \wedge \sim d)]) \\
&\quad \wedge ([\sim a \vee b] \wedge [\sim e \vee (a \wedge b)]) \wedge (d \vee e) \\
&\equiv ((b \wedge \sim c \wedge \sim d) \vee (\sim b \wedge c \wedge d)) \\
&\quad \wedge ((\sim a \wedge \sim e) \vee (b \wedge \sim e) \vee (a \wedge b)) \wedge (d \vee e) \\
&\equiv ((b \wedge \sim c \wedge \sim d) \vee (\sim b \wedge c \wedge d)) \\
&\quad \wedge [(\sim a \wedge d \wedge \sim e) \vee (b \wedge d \wedge \sim e) \\
&\quad \vee (a \wedge b \wedge d) \vee (a \wedge b \wedge e)] \\
&\equiv [a \wedge b \wedge \sim c \wedge \sim d \wedge e] \vee [\sim a \wedge \sim b \wedge c \wedge d \wedge \sim e].
\end{aligned}$$

最后一个恒等式右边的结果说明: 只有两种分派方式: 第一种分派办法是 A、B、E 去, 而 C、D 不去; 第二种分派办法是 A、B、E 不去, 而 C、D 去.

归纳本节要点及需要注意的事项

证明两个命题 S 与 R 逻辑等价的主要办法有: (1) 证明

有相同的真假表；(2) 直接证明 $S\Rightarrow R$ 及 $R\Rightarrow S$；(3) 利用已知的逻辑等价关系(如 (2.8)，(2.9)，$(p\to q)\equiv\sim p\vee q$ 等)及定理(如定理 1、定理 2 等)；(4) 证明有相同的标准形.

关于条件命题，要注意它有不同的叙述方式，另外要熟记它的真假表，这可以变成口诀："$p\to q$ 当且仅当在 1、0 时得 0 (这里 1、0 表示 $p=1$，$q=0$)". 因此，若 $(p\to q)=0$，则 $p=1$、$q=0$；又若 $q=0$、$(p\to q)=1$，那末必有 $p=0$.

命题 $R\to S$ 与关系 $R\Rightarrow S$ 绝对不能混淆. "若 R，则 S" 在逻辑学中代表命题 (记成 $R\to S$，就是 $\sim R\vee S$)，而在数学定理的行文中是"'若 R，则 S' 是恒真命题"的缩写，它代表关系 $R\Rightarrow S$(即 $(R\to S)\equiv\mathbf{1}$). 同样，"R 是 S 的充要条件"在逻辑学中代表命题(记成 $R\leftrightarrow S\equiv(R\to S)\wedge(S\to R)$)，而在数学定理的行文中则是"'$R$ 是 S 的充要条件' 是恒真命题"的缩写，代表逻辑等价关系 $R\equiv S$ (即 $(R\leftrightarrow S)\equiv\mathbf{1}$).

逻辑关系的运算次序为：

$$\text{先}\ \sim,\ \text{次}\ \to\ \text{与}\ \leftrightarrow,\ \text{后}\ \wedge\ \text{与}\ \vee.$$

化成第一(第二)标准形的方法是：先用 $\sim R\vee S$ 代替 $R\to S$，再用(2.8)及(2.9).

习 题 2·3

1. (1) 只有在温暖的时候才可能出了太阳；
   (2) 人为了生活，必须呼吸；
   (3) 睡觉前喝浓茶，会使人睡不着，
   请用"若…，则…"的语言；"必要条件"的语言；"充分条件"的语言分别改写这些句子，并写出这些命题的条件逆命题；条件否命题；条件逆否命题和否命题.
2. 若 p 表示 "理论正确"，q 表示 "实验成功"，r 表示"工程进度快"，试用符号写出下列句子：

(1) “在理论正确且实验成功的条件下，工程进度不快”．这不是事实；

(2) 理论正确或实验成功，但工程进度缓慢；

(3) 工程进度缓慢当且只当理论不正确或实验不成功时．

3．判断命题的真假：

(1) 若 $A\cap B=\emptyset$，则 $A=\emptyset$；

(2) 若 $A=\overline{A}$，则 $U=\emptyset$；

(3) 若定理成立，则逆定理成立；

(4) 若 l 是平面上 A、B 两点间比直线更短的线，则 A、B 间存在唯一的一条直线．

4．写出下列命题的真假表

(1) $(p\to q)\land(\sim q\to\sim p)$；

(2) $(p\to q)\leftrightarrow\sim(p\land\sim q)$；

(3) $(p\to\sim q)\land r$；

(4) $(p\to q)\land(q\to r)$；

(5) $(p\leftrightarrow q)\land(q\leftrightarrow r)$．

5．若 $p\to q$、$q\to r$、p 均为真，问 r 是否为真？

6．若 $\sim p\to\sim q$、$p\to r$、$\sim r$ 均为真，问 q 是否为真？

(注意　请不要混淆 $R\to S$ 与 $R\Rightarrow S$ 的区别)．

7．指出哪些是恒真命题，并说明理由：

(1) $(p\to q)\leftrightarrow(\sim q\to\sim p)$；

(2) $\sim(p\lor q)\leftrightarrow(\sim p\land\sim q)$；

(3) $p\to(p\lor q)$；

(4) $(p\land q)\to p$；

(5) $(p\to q)\leftrightarrow(q\to p)$；

(6) $(\sim p\lor\sim q)\land\sim p$；

(7) $[p\land(p\to q)]\to q$；

(8) $[\sim p\land(p\lor q)]\to q$；

(9) $[(p\land q)\to r]\leftrightarrow[p\to(q\to r)]$；

(10) $[(p\to q)\land q]\to p$；

(11) $q\to(p\land\sim p)$；

(12) $\sim q\to\sim(q\land r)$．

8．说明 $(p\to q)\to r\not\equiv p\to(q\to r)$．

9．试证明下列三个命题是彼此逻辑等价的：

$$p\to q;\quad (p\land\sim q)\to\sim p;\quad (p\land\sim q)\to q.$$

10．下列各对命题中的第二个是不是第一个的逻辑等价命题？说明理由：

(1) $p\leftrightarrow q$；　$(p\to q)\land(\sim p\to\sim q)$；

(2) $\sim q\to p$;　$\sim p\to q$;

(3) $\sim(p\to\sim q)$;　$p\wedge q$;

(4) $\sim p\to(q\wedge\sim q)$;　p;

(5) $(p\wedge q)\to r$;　$p\to(q\wedge r)$;

(6) $(p\to r)\wedge(q\to r)$;　$(p\vee q)\to r$;

(7) $\sim(p\leftrightarrow q)$;　$p\leftrightarrow\sim q$.

11. 下列各对命题是否互为否命题？为什么？

(1) $\sim p\wedge\sim q$;　$p\wedge q$;

(2) $\sim p\to\sim q$;　$\sim p\wedge q$;

(3) $p\to q$;　$\sim p\to\sim q$.

12. 化成第一标准形:

(1) $(p\to q)\to r$;

(2) $p\to((q\wedge r)\to s)$.

13. 化成第二标准形:

(1) $\sim(p\to q)$;

(2) $\sim(p\to q)\vee(p\vee q)$.

14. 写出下列各命题的否命题:

(1) 对一切实数 x, 存在一个实函数 f, 使 $f(x)>0$;

(2) 有某个正整数 n, 使 $n<f(n)$;

15. 在你所学过的数学定理中,试举出满足下列条件的一个例子:

(1) 充要条件恒成立;

(2) 必要条件恒成立,但充分条件则不然;

(3) 充分条件恒成立,但必要条件则不然.

16. $p\Rightarrow 0$, 问 p 是什么样的命题?

第四节　推理形式和正确的推理

逻辑学的任务之一就是研究、总结人类的正确思维规律. 这些规律可以用来指导正确的思维, 更可以用来发挥计算机的性能.

推理的一般形式为：由一些前提推出一个结论．前提是一些命题 $S_1, \cdots, S_n$，结论是一个命题 R.

如果 $$S_1 \wedge \cdots \wedge S_n \Rightarrow R,$$

也即 $$[(S_1 \wedge \cdots \wedge S_n) \to R] \equiv \mathbf{1},$$

那末当 $S_1, \cdots, S_n$ 均为真时，R 也必为真．所以由前提 $S_1, \cdots, S_n$ 推导出结论 R，是一个正确的推理.

反之，如果

$$[(S_1 \wedge \cdots \wedge S_n) \to R] \not\equiv \mathbf{1} \text{（即} S_1 \wedge \cdots \wedge S_n \not\Rightarrow R\text{）},$$

那末当 $S_1, \cdots, S_n$ 均为真时，R 未必为真．这时由前提 $S_1, \cdots, S_n$ 未必可能得到结论 R．也可以说：由前提 $S_1, \cdots, S_n$ 导致结论 R 的推理是谬误的.

因此，作一个正确的推理（即证明一个推理的正确性），也就是要证明一个命题等式

$$[(S_1 \wedge \cdots \wedge S_n) \to R] \equiv \mathbf{1}.$$

证明这个等式可以有四种方法：

方法 1 证明

$$\sim(S_1 \wedge \cdots \wedge S_n) \vee R \equiv \mathbf{1}$$

（运用 $\sim$, $\wedge$, $\vee$ 所满足的规律）.

方法 2 计算 $S_1 \wedge \cdots \wedge S_n$、$R$ 的真假表，证明

$$S_1 \wedge \cdots \wedge S_n \Rightarrow R.$$

这两种方法我们已经多次遇到过，在此先要着重介绍的是：总结人类一些基本推理规律，并把它们作为基础再进行推理的第三种方法，然后再介绍反证法（第四种方法）.

方法 3 由基本的推理规律来进行推理．先把一些基本的推理规律列在下面：

$$
\left.\begin{array}{ll}
(L_1) & p\wedge(p\to q)\Rightarrow q. \\
(L_2) & \sim q\wedge(p\to q)\Rightarrow\sim p. \\
(L_3) & (p\to q)\wedge(q\to r)\Rightarrow p\to r. \\
(L_4) & (p\vee q)\wedge\sim p\Rightarrow q \\
\text{或} & (p\vee q)\wedge\sim q\Rightarrow p. \\
(L_5) & p\to(q\wedge\sim q)\Rightarrow\sim p. \\
(L_6) & (p\to q)\wedge(r\to q)\equiv(p\vee r)\to q, \\
 & (p\to q)\vee(r\to q)\equiv(p\wedge r)\to q \\
 & \qquad\equiv p\to(r\to q). \\
(L_7) & (p\to q)\wedge(p\to r)\equiv p\to(q\wedge r), \\
 & (p\to q)\vee(p\to r)\equiv p\to(q\vee r). \\
 & \text{更一般地有} \\
 & (p_1\to q_1)\wedge(p_2\to q_2) \\
 & \quad\Rightarrow(p_1\wedge p_2)\to(q_1\wedge q_2), \\
 & (p_1\to q_1)\vee(p_2\to q_2) \\
 & \quad\Rightarrow(p_1\wedge p_2)\to(q_1\vee q_2). \\
(L_8) & p\to q\equiv\sim q\to\sim p. \quad (\text{逆否律}) \\
(L_9) & p\to q\Rightarrow p\vee r\to q\vee r\ \text{及}\ p\wedge r\to q\wedge r.
\end{array}\right\}(4.1)
$$

以上的规律以及“$p\to q$”的定义和本章第二节中讲的“$\sim$、$\wedge$、$\vee$”运算满足的规律 (2.8)、(2.9) 中的 (I)～(VII) 就是我们作推理的出发点.

以上公式 $(L_1)\sim(L_9)$ 中，(L_3) 就是传递律 (3.6)，(L_8) 就是逆否律 (3.4)，均已证明过．其它的公式证明如下：

(L_1)：
$$
\begin{aligned}
&[p\wedge(p\to q)]\to q \\
&\equiv\sim[p\wedge(\sim p\vee q)]\vee q \\
&\equiv\sim[p\wedge q]\vee q\equiv[\sim p\vee\sim q]\vee q \\
&\equiv\sim p\vee\mathbf{1}\equiv\mathbf{1}.
\end{aligned}
$$

(L_3): $[\sim q\wedge(p\to q)]\to\sim p$

$$\equiv\sim[\sim q\wedge(\sim p\vee q)]\vee\sim p$$

$$\equiv\sim\{(\sim q\wedge\sim p)\wedge p\}\equiv\sim\mathbf{0}\equiv\mathbf{1}.$$

(L_4) 如果 $(p\vee q)\wedge\sim p$ 为真，那末 $p\vee q$ 为真，且 $\sim p$ 为真，即 $p\vee q$ 为真且 p 不真，因此必须有 q 为真. 此即

$$(p\vee q)\wedge\sim p\Rightarrow q.$$

(L_5) 如果 p 为真，由 $q\wedge\sim q=\mathbf{0}$ 恒假可知：$p\to(q\wedge\sim q)$ 不真，所以当已知 $p\to(q\wedge\sim q)$ 为真时，必有 p 不真.

(L_6) 对第一式计算真假表(第二式类似)：

p	q	r	(1) $[(p\to q)$	(3) $\wedge$	(2) $(r\to q)]$	$p\vee r$	$p\vee r\to q$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1

由上表可看出 $(p\to q)\wedge(r\to q)$ 与 $(p\vee r)\to q$ 的真假表一样(也可以证明两边经化简后都等价于 $\sim p\vee\sim r\vee q$).

(L_7) 如果 p 不真，那末 (L_7) 式两边都为真；如果 p 为真，由左式为真可知：$p\to q$，$p\to r$ 均为真，因此必有 q 为真及 r 为真，于是 $q\wedge r$ 为真，所以右式也为真. 反之，若右式为真，由 p 为真必须 p 与 q 均为真，因而 $p\to q$ 与 $p\to r$ 均为真. 这说明左式也为真. 总上所述，左右两式的真假情况是一样的，故 (L_7) 中第一式成立. 第二式是类似的. (L_9) 留给读者证明. 以上我们证明了 $(L_1)\sim(L_9)$. 至于用什么样的证法，是

可以灵活掌握的，例如也可用 (L_8) 与 (L_1) 来证明 (L_2) 如下：

$$\sim q\wedge(p\to q)\equiv\sim q\wedge(\sim q\to\sim p) \qquad (L_8)$$

$$\Rightarrow\sim p. \qquad (L_1)$$

规律 (L_1)～(L_5) 可以写成简单的正确的推理形式：

	前　　提	结　　论	
(L_1)	$p,\ p\to q$	q	（直接用条件）
(L_2)	$\sim q,\ p\to q$	$\sim p$	（反用条件）
(L_3)	$p\to q,\ q\to r$	$p\to r$	（称为"三段论"）
(L_4)	$p\vee q,\ \sim p$	q	（排斥另一个）
(L_5)	$p\to \mathbf{0}$	$\sim p$	（导致矛盾）

(4.2)

【例 1】 以下推理是正确的：

前提 ① 如果我努力学习，我每天学数学一小时．

前提 ② 我努力学习（命题 p），

∧)*)

结论：　我每天学数学一小时（命题 q）．

因为它是 (L_1) 形式的推理：第一个前提 ① 为命题 $p\to q$．但是以下的推理是谬误的：

前提 ① 如果我身体好，我每天努力工作（$p\to q$）．

前提 ② 我每天努力工作（命题 q），

∧)

结论：　我身体好（命题 p）．

这是因为 $[(p\to q)\wedge q]\to p$ 不是恒真命题，这只需写出它的真假表就可看到这一点：

*) 记号 ∧) ___ 表示前提的逻辑运算 ∧．

p	q	$p\to q$	$(p\to q)\wedge q$	$[(p\to q)\wedge q]\to p$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

在这个真假表中从第三行看出，虽然 $p\to q$ 与 q 均为真，但 p 仍可以不真．事实上，“如果我身体好，我每天努力工作”这句话并未排斥“我身体不好也努力工作”，因此从“我努力工作”并不能导致“我身体一定好”的结论．

有一些常见的谬误，例如：

$$
\begin{array}{ll}
(E_1) & \begin{array}{l} \quad p\to q \\ \underline{\wedge)\ q\qquad} \\ \therefore\ p \end{array}
\qquad
(E_2) \quad \begin{array}{l} \quad p\to q \\ \underline{\wedge)\ p\to r} \\ \therefore\ q\to r \end{array}
\\
(E_3) & \begin{array}{l} \quad p\vee q \\ \underline{\wedge)\ p\qquad} \\ \therefore\ \sim q \end{array}
\qquad
(E_4) \quad \begin{array}{l} \quad p\to q \\ \underline{\wedge)\ \sim p\quad} \\ \therefore\ \sim q \end{array}
\end{array}
\qquad (4.3)
$$

$$
(E_5) \quad \begin{array}{l} \quad p\to r \\ \underline{\wedge)\ q\to r} \\ \therefore\ p\to q \end{array}
$$

需要注意的是：请读者思考一下：它们为什么是谬误的(读者可以同时列出前提和结论的真假表，并指出在两个前提均取 1 时，结论还可能取 0 值)？

【例 2】 问下述推理是否正确？

前提：$p\to q$，$\sim(q\vee r)$．结论：$\sim p$．

解：

$$
\begin{array}{lcl}
\quad p\to q & \equiv & \quad p\to q \\
\underline{\wedge)\ \sim(q\vee r)} \equiv \sim q\wedge\sim r \Rightarrow & & \underline{\wedge)\sim q\quad} \\
 & & \quad \sim p.
\end{array}
$$

由 (L_2) 可知推理是正确的.

【例 3】 证明

$$(r\vee s)\wedge(r\rightarrow p)\Rightarrow p\vee s.$$

【证】

$$\begin{array}{rcl} r\rightarrow p & \equiv & \sim p\rightarrow\sim r \quad (\text{由}(4.1),\ (L_8)) \\ \wedge)\ r\vee s & \equiv & \wedge)\ \sim r\rightarrow s \\ \hline & & \therefore\ \sim p\rightarrow s\equiv p\vee s\ (\text{由}(4.2),\ (L_3)). \end{array}$$

【例 4】 问下述推理是否正确?

前提: $\sim p\rightarrow q,\ \sim r\vee\sim s,\ q\rightarrow s,\ r.$

结论: p. (重新排)

解:

$$\begin{array}{rclcl} \sim p\rightarrow q & \equiv & \sim q\rightarrow p\ (L_8) & & r \\ \sim r\vee\sim s & \equiv & r\rightarrow\sim s & \text{即} & r\rightarrow\sim s \\ q\rightarrow s & \equiv & \sim s\rightarrow\sim q\ (L_8) & & -s\rightarrow\sim q \\ \wedge)\ r & & \wedge)\ r & & \wedge)\ \sim q\rightarrow p \\ \hline & & & & \therefore\ p\ (\text{推理正确}). \end{array}$$

*【例 5】(雷维斯卡洛尔的例子) 若

(1) 房中所有注明日期的信都是用蓝纸写的;

(2) 小王写的信都是用"亲爱的同志"起始的;

(3) 除小张以外没有人再用黑墨水写信;

(4) 我可以看的信都未收藏起来;

(5) 只有一页信纸的信中无一是未注明日期的;

(6) 未做记号的信都是用黑墨水写的;

(7) 用蓝纸写的信都收藏起来了;

(8) 一页以上信纸的信中无一是做记号的;

(9) 以"亲爱的同志"开始的信没有一封是小张写的.

求证: 我不可以看小王写的信.

【证】 令

p 表示"信是注明日期的";

q 表示"信是写在蓝纸上的";
r 表示"信是用黑墨水写的";
s 表示"信是小张写的";
t 表示"信收藏起来了";
u 表示"我可以看这封信";
v 表示"只有一页纸的信";
w 表示"做记号的信";
x 表示"小王写的信";
y 表示"以'亲爱的同志'起始的信".

那末 (1)～(9) 变成: (重新排)

(1) $p\to q$			(2) $x\to y$
(2) $x\to y$			(9) $y\to \sim s$
(3) $\sim s\to \sim r$			(3) $\sim s\to \sim r$
(4) $u\to \sim t$	$\equiv$	$t\to \sim u$	(6) $\sim r\to w$
(5) $v\to p$			(8) $w\to v$
(6) $\sim w\to r$	$\equiv$	$\sim r\to w$	(5) $v\to p$
(7) $q\to t$			(1) $p\to q$
(8) $\sim v\to \sim w$	$\equiv$	$w\to v$	(7) $q\to t$
(9) $y\to \sim s$			(4) $t\to \sim u$

$\therefore\ x\to \sim u$ (多次用(L_3))

结论: $x\to \sim u$ (即我不可以看小王写的信)证毕. ▌

方法 4 (反证法) 由第三节定理 1 可以知道

"$S_1\wedge\cdots\wedge S_n\Rightarrow R$" 等价于 "$S_1\wedge\cdots\wedge S_n\wedge\sim R\equiv\mathbf{0}$",

而后一个恒等式又等价于

$$S_1\wedge\cdots\wedge S_n\wedge\sim R\Rightarrow\mathbf{0}.$$

一般说来, 证明这最后一个等式也可以用不同的方法: 事实上, 直接计算 $S_1\wedge\cdots\wedge S_n\wedge\sim R$ 的方法就是方法 1; 计算 $S_1\wedge\cdots\wedge S_n\wedge\sim R$ 真假表的方法实质上就是方法 2, 因此就不必另立条款了, 需要特别提出的方法, 就是用方法 3 的思路

来证明

$$S_1 \wedge \cdots \wedge S_n \wedge \sim R \underset{c}{\Rightarrow} \mathbf{0}$$

这就是反证法.

【例 6】 求证

$$[p \to (r \to s)] \wedge (\sim r \to \sim p) \wedge p \Rightarrow s.$$

【证】 用反证法，只需证明

$$[p \to (r \to s)] \wedge (\sim r \to \sim p) \wedge p \wedge \sim s \Rightarrow \mathbf{0}.$$

在下表中左边的一些命题必蕴涵 ($\Rightarrow$) 在右边的一些命题:

$$\begin{array}{lcl} \left.\begin{array}{l} p \\ p \to (r \to s) \end{array}\right\} & \overset{(L_1)}{\Rightarrow} & \left\{\begin{array}{l} p \\ r \to s \end{array}\right. \\ \sim r \to \sim p & \equiv & p \to r \\ \hline \wedge)\ \sim s & & \wedge)\ \sim s \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \overset{(L_3)}{\Rightarrow} \begin{array}{l} s \\ \hline \wedge)\ \sim s \\ \therefore\ \mathbf{0}. \end{array}$$

也就是说

$$[p \to (r \to s)] \wedge (\sim r \to \sim p) \wedge p \wedge \sim s \Rightarrow s \wedge \sim s \equiv \mathbf{0}.$$

这正是我们所需要证明的. ∎

归纳上述要点

正确的推理就是蕴涵关系

$$S_1 \wedge \cdots \wedge S_n \Rightarrow R.$$

$S_i (i=1, \cdots, n)$ 叫前提; R 叫结论.

推理正确性的证明方法有:

1° 用逻辑运算所满足的规律计算

$$\sim (S_1 \wedge \cdots \wedge S_n) \vee R,$$

看它是否为 **1** (或者计算 $S_1 \wedge \cdots \wedge S_n \wedge \sim R$, 看它是否为 **0**).

2° 填写 $\sim (S_1 \wedge \cdots \wedge S_n) \vee R$ 的真假表 (或 $S_1 \wedge \cdots \wedge S_n \wedge \sim R$ 的真假表), 看它是否恒真(或恒假).

3° 用 $(L_1) \sim (L_9)$ 证明在前提 $S_1, \cdots, S_n$ 下有结论 R.

4° (反证法)用$(L_1)\sim(L_8)$证明在前提$S_1, \cdots, S_n, \sim R$下有结论$\mathbf{0}$(“矛盾”).

习　题　2.4

1．用符号逻辑证明下述推理(可用反证法)：

(1) $\begin{array}{l} p\vee q \\ p\leftrightarrow r \\ \sim p \\ \hline \therefore\ r \end{array}$;

(2) $\begin{array}{l} q\to p \\ r\vee \sim p \\ \hline \therefore\ \sim r\to \sim q \end{array}$;

(3) $\begin{array}{l} p\leftrightarrow q \\ q\vee \sim r \\ s\to r \\ s \\ \hline \therefore\ p \end{array}$;

(4) $\begin{array}{l} q\to \sim p \\ p\vee r \\ q \\ \hline \therefore\ r \end{array}$;

(5) $\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore\ p\to q \end{array}$;

(6) $\begin{array}{l} p \\ \sim q \\ \hline \therefore\ q\to p \end{array}$;

(7) $\begin{array}{l} p\wedge q \\ \sim q \\ \hline \therefore\ p \end{array}$;

(8) $\begin{array}{l} q\to p \\ \sim q\leftrightarrow p \\ \hline \therefore\ p \end{array}$;

(9) $\begin{array}{l} p\to q \\ \sim(q\vee r) \\ \hline \therefore\ \sim p \end{array}$;

(10) $\begin{array}{l} p\leftrightarrow q \\ q\to r \\ \sim r\vee s \\ \sim p\to s \\ \hline \therefore\ s \end{array}$;

(11) $\begin{array}{l} p\to q \\ s\to \sim q \\ s\vee t \\ p\to \sim t \\ \hline \therefore\ \sim p \end{array}$;

(12) $\begin{array}{l} (w\vee u)\wedge \sim p \\ w\to s \\ s\to p \\ \hline \therefore\ u \end{array}$.

2．说明以下推理都是不正确的：

(1) $\begin{array}{l} p\vee q \\ p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$;

(2) $\begin{array}{l} p\to q \\ q\vee r \\ \hline \therefore\ r\to \sim p \end{array}$;

(3) $\begin{array}{l} p\to q \\ \sim p\vee q \\ \hline \therefore\ q\to p \end{array}$;

(4) $\begin{array}{l} p\vee \sim r \\ p\vee q \\ \hline \therefore\ q\vee r \end{array}$;

(5) $\begin{array}{l} p\to \sim q \\ p\wedge r \\ \hline \therefore\ \sim q\to \sim r \end{array}$.

3. 填写正确而简单的一个结论:

(1)
$$\begin{array}{l} \sim p \vee q \\ \sim q \\ \hline \therefore\ ? \end{array};$$

(2)
$$\begin{array}{l} p \to (s \vee q) \\ \sim s \wedge \sim q \\ s \to p \\ \hline \therefore\ ? \end{array};$$

(3)
$$\begin{array}{l} p \to q \\ \sim r \to \sim q \\ p \\ \hline \therefore\ ? \end{array};$$

(4)
$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \vee r \\ \sim r \\ \hline \therefore\ ? \end{array}.$$

4. 若 $(MgO \wedge H_2) \to (Mg \wedge H_2O)$


$(C \wedge O_2) \to CO_2$


$CO_2 \wedge H_2O \to H_2CO_3$

今有 MgO, H_2, O_2, C. 求证由此能制得 H_2CO_3.

[提示: 用方法 3.]

5. 求证:

(1) 若 $p \Rightarrow q$, 则 $\sim q \Rightarrow \sim p$;

(2) $p \wedge q \Rightarrow p$, $p \Rightarrow p \vee q$;

(3) 若 $p \Rightarrow q$, $r \Rightarrow s$, 则 $p \,{}^{\vee}_{\wedge}\, r \Rightarrow q \,{}^{\vee}_{\wedge}\, s$;

(4) $\sim(p \to q) \Rightarrow p$, $\sim(p \sim q) \Rightarrow \sim q$.

6. 下面推理是否正确?

(1) 如果我恢复了健康，我就能继续工作. 假使我不能继续工作，我就必须出外疗养或卧床在家. 但是我没有出外疗养的机会，并且不愿意在家里躺在床上. 所以我必须恢复健康.

(2) 如果分配小黄到幼儿园工作，她就很高兴. 但是她在幼儿园就会闹孩子气，一闹孩子气，家长就有意见. 家长有意见，她就不高兴. 除了在幼儿园工作之外，小黄只能在家. 因此小黄只能在家.

7. 下面推理是否正确?

(1) 如果我在图书馆，那末图书馆必开着. 不是在下班时间，那么图书馆就开着. 现在是上班时间，因此，我必在图书馆.

(2) 如果我好好学习，我就不会不及格．如果我去年不曾常玩牌，我就好好学习．我没及格，因此我去年常玩牌．

8．证明若 $p_1\wedge\cdots\wedge p_n\wedge r\Rightarrow q$，那末 $p_1\wedge\cdots\wedge p_n\Rightarrow(r\rightarrow q)$．

第五节　数学归纳法原理

本节要把推理用于阐明归纳性的论证方法——数学归纳法．

先看一个直观的例子：如果有一队人排成一个纵队（不管人数有多少）传一个口令，每人只传给紧接于他后面的一个人．怎样才能保证每人知道的口令都是正确的呢？根据经验可以知道，为了不传错，必须且只须做到下面两点：

(D_1) 第一个人知道的口令不能是错的；

(D_2) 每一步传令均不传错，接令者不能听错．

如果用命题 p_n（n 任意）表示"第 n 个人知道的口令是真的"，于是可用符号把上面的两条写成：

(D_1) p_1 为真；(D_2) 对任意的 k，均有 $p_k\rightarrow p_{k+1}$ 为真．

这两条就能保证结论

"对一切的 n，p_n 为真"．

把这个例子抽象化，就是数学归纳法．

数学归纳法原理Ⅰ　有一个与 n（$n=n_0$，n_0+1，…）有关的命题 p_n（n 固定后，它是一个命题），需要判断它们的真假．

如果有：

(D_1) p_{n_0} 为真；(D_2) 对任意的 $k\geqslant n_0$，均有 $p_k\rightarrow p_{k+1}$ 为真．

那末，对一切的 n，p_n 为真．

以上叙述也可用符号简写为

$$p_{n_0},\ \forall_k(\geqslant n_0)p_k\rightarrow p_{k+1},\ \Rightarrow\forall_n(\geqslant n_0)p_n$$

(其中记号 ∀ 表示"对任一个").

数学归纳法原理作为推论的正确性几乎是显然的:

p_{n_0} 为真[由 (D_1)], $p_{n_0}\rightarrow p_{n_0+1}$ 为真[由 (D_2)], 所以, 由 (L_1) 知 p_{n_0+1} 为真; 再由 $p_{n_0+1}\rightarrow p_{n_0+2}$ 为真[由 (D_2)], 可知 p_{n_0+2} 为真; 再由 $p_{n_0+2}\rightarrow p_{n_0+3}$ 为真[由 (D_2)], 得到 p_{n_0+3} 为真, ….

【例 1】 求 $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)$.

解: 记上式的和为 S_n. 我们先看几个特例, 以便归纳出来一般的公式.

$$S_1=1,\quad S_2=1+3=4,\quad S_3=1+3+5=9.$$

可以看出 S_1、S_2、S_3 分别是 1^2、2^2、3^2. 如果用 p_n 表示命题(即我们猜测的公式)

$$S_n=n^2.$$

需要判断: 对任意的 $n\geqslant1$, 命题 p_n 是否都为真?

现在我们用数学归纳法来证明对任意的 $n\geqslant1$, 命题 p_n 都为真. 由归纳法原理: 只需证明 (D_1)、(D_2) 成立就够了. 证明如下:

(1) $n=1$ $(n_0=1)$ 时, $S_1=1^2$, 即 p_1 为真, 故 (D_1) 成立.

(2) 对任意的 $k\geqslant1$, 要证明 $p_k\rightarrow p_{k+1}$ 为真. 若 p_k 为真, 那末 $S_k=k^2$, 于是

$$S_{k+1}=S_k+[2(k+1)-1]=k^2+2k+1=(k+1)^2,$$

所以 S_{k+1} 也为真. 因此 $p_k\rightarrow p_{k+1}$ 为真. 所以 (D_2) 成立.

由归纳法原理 I 可知: 对一切的 n, p_n 为真. 即

$$S_n=n^2$$

对一切 n 都成立.

注意 数学归纳法原理 I 可以用语言叙述成:

设有一个与 n ($\geqslant n_0$) 有关的命题 p_n, 如果我们已证明了: (1) p_{n_0} 为真; (2) 对于任意的 $k\geqslant n_0$, "如果 p_k 真, 就必须有 p_{k+1} 真", 那末对于任意的 $n\geqslant n_0$, 命题 p_n 为真 (这里"如果 p_k 真"叫做*归纳法假定*).

数学归纳法原理有很多不同的变形, 最常见的是下述的变形, 即把前提 (D_2) 改为 (D_2'):

(D_2') 对任意的 k($\geqslant n_0$) 命题 $(p_{n0}\wedge p_{n0+1}\wedge\cdots\wedge p_k)\rightarrow p_{k+1}$ 为真.

这就是:

数学归纳法原理 II 对一个与 n ($\geqslant n_0$) 有关的命题 p_n, 如果有

(D_1) p_{n0} 真;

(D_2') 对任意的 k($\geqslant n_0$), 命题 $(p_{n0}\wedge p_{n0+1}\wedge\cdots\wedge p_k\rightarrow p_{k+1})$ 为真.

那末对一切 n, p_n 为真.

用符号可写成:

$$p_{n0},\quad \forall_k(\geqslant n_0),$$
$$[(p_{n0}\wedge p_{n0+1}\wedge\cdots\wedge p_k)\rightarrow p_{k+1}]\Rightarrow\forall_n(n\geqslant n_0),\ p_n.$$

用语言可叙述成:

设有一个与 n($\geqslant n_0$) 有关的命题 p_n. 如果已证明了: (1) p_{n0} 为真; (2) 对于任意的 k($\geqslant n_0$), "如果 p_n 在 $n<k$ 时均为真, 就必须有 p_k 为真", 那末对于任意的 n ($\geqslant n_0$), 命题 p_n 为真.

注意 这里"如果 p_n 在 $n<k$ 时均为真"只是一个假定, 并不是断言, 它叫做*归纳法假定*.

【例 2】 有两堆棋子数目相等, 两个人每人可以在其中

一堆里任取几颗棋子，但是不能在两堆里都取．规定谁取完这两堆，谁就胜利．求证后取的人必胜．

【证】 设每堆棋子有 n 颗．令

命题 p_n 表示"每堆有 n 颗棋子时，后取的人必胜"．在 $n=1$ 时，每堆只有一个棋子，所以显然 p_1 为真，于是 (D_1) 成立 $(n_0=1)$．现在我们假定(归纳法假定)在 $n<k$ 时，p_n 都为真，就是说：在每堆的棋子少于 k 颗时，后取的人必胜．那末我们断定在每堆的棋子恰为 k 颗时，后取的人也必胜(即 p_k 也为真)．这是因为：假若先取的人在某堆中取了 l 颗 $(l\leqslant k)$，则后取的人可以在另一堆里也取 l 颗，剩下来的两堆每堆都是 $k-l$ 颗，又因 $k-l<k$．由归纳法假定：p_{k-l} 为真，即进行下去应是后取的人胜利，故在每堆为 k 颗时也是后取的人胜利．此即 p_k 为真，因此"$(p_1\wedge p_2\wedge\cdots\wedge p_{k-1})\rightarrow p_k$"为真，也就是说 (D_2') 成立．由数学归纳法原理 II 立刻得到 $\forall_n$，p_n 为真．故不管每堆棋子有多少，后取的人必胜．

在这个例子中，归纳法的证明过程还给出了得胜的办法．可是我们要问：结论"后取的人必胜"是怎么知道的呢？事先如果不知道这个结论，那就无法进行归纳证明．为了得到一定的结论，就需要对 $n=n_0$ (本例中为 1)、n_0+1、n_0+2 等开始的几个数进行考察，并猜测命题 p_n 的形式，只要猜对了，用数学归纳法证明并不难．

但是，下面的例子又说明了：只凭前几个 n 的值来猜测命题的形式有时也会导致不正确的结论．在这种情况下，数学归纳法的推理是进行不下去的(即条件 (D_2) 或 (D_2') 不会被满足)．

【例 3】 试考察 $f(n)=n^2+n+11$ 是否都是质数．

解：如果只考虑开始的几个 n，那末 $f(n)$ 确是质数，事

实上，有

$$f(1)=13,\quad f(2)=17,\quad f(3)=23,$$
$$f(4)=31,\quad f(5)=41,\quad f(6)=53,$$
$$f(7)=67,\quad f(8)=83,\quad f(9)=101.$$

它们都是质数，但是“对任何 n, $f(n)$ 是质数”显然是不正确的，因为 $f(10)=121=11^2$ 就不是质数。这时归纳法推理的条件 (D_2) 显然不满足，由于此时命题 $p_9 \to p_{10}$ 不真，所以 (D_2)（或 (D_2')）不成立。

在数学归纳法的证明中，条件 (D_1) 是基础，没有正确的基础是无法归纳的。如在传口令的例子中，若第一个人知道的口令是错的，再传得清楚也不能保证每个人知道的口令是正确的。

再举一个反例：若 p_n 表示“$n=n+1$”，那末 (D_2) 是满足的，即命题 $p_k \to p_{k+1}$ 是真的（若有 $k=k+1$，自然就有 $k+1=k+2$，因此不管 p_k 是否为真，总有 $p_k \to p_{k+1}$ 为真），但是 p_n 显然一个也不真，这里 (D_1) 不满足，即不存在一个 n_0，使 p_{n_0} 为真，因此数学归纳法推理无法进行。另一方面，如果 (D_2) 或 (D_2') 不满足，那末数学归纳法也是无法进行的。例 3 就说明了单凭开始的几个 n 值总结出来的公式或结论是不一定可靠的。一定要满足 (D_2) 或 (D_2')，这结论才是无误的。用开始的几个 n 值总结出某个结论的方法称为不完全归纳法，在非数学的领域中用的“归纳法”就是不完全归纳法。不完全归纳法是粗糙的，不一定可靠，需要通过 (D_2) 或 (D_2') 的检验来“完善”它才能保证归纳出来的结论是正确的。不完全归纳法通过 (D_2) 或 (D_2') 检验后，就是数学归纳法，也叫做完全归纳法。在数学领域中用的“归纳法”术语乃是数学归纳法。可见同一个“归纳法”术语在数学领域以内与以外的理解是完全

不同的．请大家注意：在数学领域以外的自然科学中，对于用不完全归纳法总括出来待检定的结论一般并不一定要通过 (D_2) 或 (D_2') 的推理的方法来完善它，而是通过实践的检验来逐步完善的．由于实践是不断发展的，所以"结论"的正确性也随着实践的发展而不断发展．

在实际情况中能不能用数学归纳法，关键在于结论是否知道．不完全归纳法常常可以用来猜测结论，因此也是很重要的，是数学推理的重要辅助手段．我们甚至常常会遇到这样的情况：猜测一个结论比证明它更难．所以猜测的手段和证明的方法都是我们应该重视的．

*【例 4】(差分方程的解)　设有序列 a_n，我们称 $a_{n+1}-a_n$ 为该序列的**一阶差分序列**，并记为 Δa_n．形如

$$\alpha\cdot\Delta a_n+\beta a_n=\gamma \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma \text{ 是常数})$$

的等式叫做序列 a_n 满足的**一阶差分方程**．这个方程是一个一阶递推关系(序列 a_n 满足的一个代数关系)：

$$\alpha a_{n+1}+(\alpha+\beta)a_n=\gamma.$$

所以有时也就把一阶递推关系叫做一阶差分方程．

我们要讨论的是：给定了一阶差分方程求满足它的序列．也就是给定了差分方程

$$ax_{n+1}+bx_n=c \quad (n\geqslant 0),$$

求 x_n 的表达式，这里 a、b、c 是已知常数，而且不妨设序列从第 0 项 x_0 开始．

x_0 叫做序列 x_n 的**初始值**，它可以任意给定而并不影响差分方程的成立与否．

我们用数学归纳法证明下述结论：

任给一个一阶差分方程(即 a、b、c 三个数)及一个初始值 x_0，就可以唯一地确定 x_n．

【证】　当 $n=0$ 时，x_0 由假设给定，因此 x_0 完全确定了．现在假定在 n 时，x_n 已完全确定(归纳法假设)，于是由 x_{n+1} 满足的差分方程知道

$$x_{n+1}=\frac{1}{a}(c-bx_n)$$

也就完全确定了. 由归纳法原理可知对于任意的 n 序列 x_n 确实由 x_0 及由 x_n 满足的差分方程唯一确定.]

下面给出 x_n 的表达式,分两种情况:

1) $a+b=0$

于是 $b=-a$, 从而由差分方程可得

$$x_{n+1}=\frac{c}{a}+x_n.$$

把这个式子运用多次,得

$$x_{n+1}=\frac{c}{a}+x_n=\frac{c}{a}+\left(\frac{c}{a}+x_{n-1}\right)$$
$$=\cdots=(n+1)\frac{c}{a}+x_0.$$

这就是说:序列 x_n 的表达式为

$$x_n=n\frac{c}{a}+x_0.$$

2) $a+b\neq0$

于是由差分方程可得

$$x_{n+1}=\frac{c}{a}-\frac{b}{a}x_n.$$

反复运用这个式子多次,得到

$$\begin{aligned}x_n&=\frac{c}{a}-\frac{b}{a}x_{n-1}=\frac{c}{a}-\frac{b}{a}\left(\frac{c}{a}-\frac{b}{a}x_{n-2}\right)\\&=\frac{c}{a}\left(1-\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}\right)^2x_{n-2}=\frac{c}{a}\left(1-\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{c}{a}-\frac{b}{a}x_{n-3}\right)\\&=\frac{c}{a}\left[1-\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]-\left(\frac{b}{a}\right)^3x_{n-3}=\cdots\\&=\frac{c}{a}\left[1-\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2-\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}\right]+(-1)^n\left(\frac{b}{a}\right)^nx_0\\&=\frac{c}{a}\cdot\frac{1-\left(-\frac{b}{a}\right)^n}{1-\left(-\frac{b}{a}\right)}+(-1)^n\left(\frac{b}{a}\right)^nx_0\\&=\frac{c}{a+b}\cdot\frac{a^n+(-1)^{n-1}b^n}{a^n}+(-1)^n\frac{b^n}{a^n}x_0.\end{aligned}$$

完全类似地，应用数学归纳法可以证明当 a、b、c 随 n 变时的差分方程（称为*变系数差分方程*）为

$$a_n x_n + b_n x_{n-1} = c_n.$$

当初始值 x_0 给定后就可以唯一地确定序列 x_n，但是这时候 x_n 的表达式就很复杂了．如果 $a_n = a$、$b_n = b$，则差分方程叫做*常系数差分方程*。

对于常系数差分方程

$$a x_n + b x_{n-1} = c_n$$

（其中 a、b 为已知常数；c_n 为已知序列），类似于前面 $c_n \equiv c$ 的情况作递推，可以解得：

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{a}(c_1 + \cdots + c_n) + x_0 \quad (\text{若 } a+b=0), \\ \dfrac{1}{a}\left[c_n - c_{n-1}\dfrac{b}{a} + c_{n-2}\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 - \cdots + (-1)^{n-1} c_1 \left(\dfrac{b}{a}\right)^{n-1}\right] \\ \qquad + (-1)^n \dfrac{b^n}{a^n} x_0. \end{cases}$$

类似地，二阶递推方程

$$a_n x_n + b_n x_{n-1} + c_n x_{n-2} = d_n$$

也可以叫做*二阶差分方程*．一般地，序列 x_n 的差分是指 $x_{n+1} - x_n$，记成 Δx_n，叫做*一阶差分*．一阶差分 Δx_n 也是一个序列，它的差分叫*二阶差分*，记成 $\Delta^2 x_n$，即

$$\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = (x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n).$$

一般的二阶差分方程是指

$$\alpha_n \Delta^2 x_{n-2} + \beta_n \Delta x_{n-1} + \gamma_n x_n = \delta_n$$

$$(\text{或} \quad \alpha'_{n+2} \Delta^2 x_n + \beta'_{n+2} \Delta x_n + \gamma'_n x_n = \delta'_n)$$

形式的方程，利用差分的定义，就可以把它化成递推方式的方程。

$$a_n x_n + b_n x_{n-1} + c_n x_{n-2} = d_n$$

$$(\text{或相应地} \quad a'_{n+2} x_{n+2} + b'_{n+2} x_{n+1} + c'_{n+2} x_n = d'_n).$$

反之，一个以上的二阶递推方程也必能写成差分形式．因此就把递推方程叫做*差分方程*．

一个满足二阶差分方程

$$a_n x_n + b_n x_{n-1} + c_n x_{n-2} = d_n$$

的序列 x_n 叫做该方程的一个**解**。

同一阶差分方程类似地用数学归纳法可以证明：给定二阶差分方程及任意给定首先的二项 x_0 和 x_1 后，序列 x_n 就完全确定了。

有一类方程

$$ax_n+bx_{n-1}+cx_{n-2}=d\ (a>0;\ a、b、c、d \text{ 都是常数})。$$

可以用降阶法求解，即化成依次解两个一阶差分方程的问题．在这里我们只指出要点，而不具体去解它．引进一个序列 y_n，使它满足

$$y_n=\alpha x_n+\beta x_{n-1},\quad py_n+qy_{n-1}=d,$$

这里 α、β、p、q 用待定系数法由原方程确定(实际上还包含了一个任意参数)．然后去解方程 $py_n+qy_{n-1}=d$ 得 y_n，再解 $y_n=\alpha x_n+\beta x_{n-1}$ 得 x_n.

【例 5】 试证由 3 分邮票和 5 分邮票就可以得到 8 分以上的任何邮资．

【证】 先看 $8=3+5,\quad 9=3\times3.$

因此，在邮资分值为 8 与 9 时均能用 3 分与 5 分邮票得到．现对邮资分值 $n\geqslant9$ 用数学归纳法证明我们的结论．

设对某个 $k(\geqslant9)$ 时结论正确(归纳法假设)．为证 $k+1$ 时结论也正确，我们分两种情况：

1) 这 k 分邮资中有一张 5 分邮票，那末用两张 3 分邮票换去这张 5 分邮票，就可凑得 $k+1$ 分邮资的 3 分及 5 分邮票．

2) 如果这 k 分邮资中一张 5 分邮票都没有，那末它至少有三张 3 分邮票 ($\because k\geqslant9$)，用两张 5 分邮票换去三张 3 分邮票，就可凑得 $k+1$ 分邮资的邮票．

因此命题在 $k+1$ 时也为真，由数学归纳法原理 I 可知对一切 n 命题正确．】

数学归纳法可以有许多变种：不仅可以向前沿 n 增长的方向作归纳，还可以向后沿 n 减少的方向作归纳，举例如下：

【例 6】 求证若 $x_1\geqslant0,\ \cdots,\ x_n\geqslant0$，则有

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\geqslant(x_1\cdots x_n)^{1/n}.$$

而且“=”当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立.

（这是一个著名的不等式，左方叫做 $x_1, \cdots, x_n$ 的算术平均数；右方叫做 $x_1, \cdots, x_n$ 的几何平均数.）

【证】 不妨设所有的 $x_1, \cdots, x_n$ 均为正，因为若在它们中有某个为 0 时，不等式是显然成立的. 下面分几步证明：

1）先证明在 $n=2^m$ 时命题成立.

对 m 作归纳法：若 $m=1$，则 $n=2$，我们考虑

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-x_1x_2=\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2\geqslant 0,$$

而且“=”成立当且仅当 $x_1=x_2$ 时. 在不等号成立时，我们就得到

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2>x_1x_2,$$

即
$$\frac{x_1+x_2}{2}>\sqrt{x_1x_2}.$$

所以 $m=1$ 时命题是成立的.

现在假设 $m=k$ 时命题成立，即

$$\frac{x_1+\cdots+x_{2^k}}{2^k}\geqslant(x_1x_2\cdots x_{2^k})^{\frac{1}{2^k}},$$

而且“=”成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_{2^k}$ 时. 我们要证明当 $m=k+1$ 时命题也成立. 这是因为

$$\begin{aligned}\frac{x_1+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}&=\frac{\dfrac{x_1+\cdots+x_{2^k}}{2^k}+\dfrac{x_{2^k+1}+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}\\&\geqslant\frac{(x_1\cdots x_{2^k})^{\frac{1}{2^k}}+(x_{2^k+1}\cdots x_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^k}}}{2}\\&\geqslant\sqrt{(x_1\cdots x_{2^k})^{\frac{1}{2^k}}\cdot(x_{2^k+1}\cdots x_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^k}}}\\&=(x_1\cdots x_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^{k+1}}}.\end{aligned}$$

其中第一个“=”当且仅当 $x_1\cdots x_{2^k}=x_{2^k+1}\cdots x_{2^{k+1}}$ 时成立，第二个“=”当且仅当 $x_1=\cdots=x_{2^k}$, $x_{2^k+1}=\cdots=x_{2^{k+1}}$ 时成立。因此，

$$\frac{x_1+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\geqslant(x_1\cdots x_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^{k+1}}},$$

而且“=”当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_{2^{k+1}}$ 时成立。

由数学归纳法原理 I 可知：对一切的 $n=2^m$ 命题成立。

2) 现在证明：“如果对任意的 n 命题成立，则对 $n-1$ 命题也成立”。这是因为

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}=\frac{(x_1+\cdots+x_{n-1})+\dfrac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}{n}$$

$$\geqslant\left[x_1x_2\cdots x_{n-1}\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)\right]^{\frac{1}{n}},$$

而且“=”当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=\dfrac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$ 时成立。因此

$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\geqslant(x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{n}},$$

即

$$\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\geqslant(x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{n-1}},$$

而且“=”成立当且仅当 $x_1=\cdots=x_{n-1}$ 时。

3) 最后我们用向后的数学归纳法原理说明命题对一切的 n 都成立。设 n 为任意正整数，则必存在一个正整数 m，使 $n\leqslant2^m$。由 1) 知在 2^m 时命题成立。由 2) 利用归纳法原理(但向 n 减小的方向使用归纳) 知对一切满足 $k\leqslant2^m$ 的 k，命题都成立。但是 $n\leqslant2^m$，所以对 n 命题也成立。▌

归纳本节要点

应用数学归纳法证明命题的一般步骤为：

1° 先验证 n 取第一个自然数 n_0 时命题成立（这是递推

的基础)；

2° 再作出归纳法假定："设 $n=k(k\geqslant n_0)$ 时命题成立"，然后利用这个假定来证明："当 $n=k+1$ 时命题也成立"(这是递推的根据)．

证实了这两点以后就可以作出结论："对于从 n_0 开始的所有自然数 n，命题都成立"(此即在1°的基础上利用2°的结论进行递推)．

在反向运用归纳法时，2°中归纳法假定中的 $k\geqslant n_0$ 以及后面的 $k+1$ 应分别改为 $k\leqslant n_0$ 及 $k-1$．

习 题 2·5

1．证明 $1-3+5-7+\cdots+(-1)^{n-1}(2n-1)=(-1)^{n-1}n$．

2．证明 $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$．

3．证明 $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{4}{3\cdot5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$．

4．证明 $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$．

5．证明当 $a\neq0$, $a>-1$, $n>1$ 时，有 $(1+a)^n>1+na$．

6．证明当 $n\geqslant4$ 时，有 $n^3>3n^2+3n+1$．

7．证明对 $k>0$ 只要 n 充分大就有 $2^n>n^k$．

8．证明 $1\cdot1!+2\cdot2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!\cdot(-1)!$．

9．若令

$$\Delta_- f(x)=f(x)-f(x-1),$$
$$\Delta_-^2 f(x)=\Delta_- f(x)-\Delta_- f(x-1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\Delta_-^n f(x)=\Delta_-^{n-1}f(x)-\Delta_-^{n-1}f(x-1).$$

那末有公式

$$\Delta_-^n f(x)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!}f(x-j).$$

10．试证：满足差分方程 $x_n=3x_{n-1}+2\ (n\geqslant2)$，且 $x_1=1$ 的序列必是

$x_n = 3^n - 3^{n-1} - 1.$

11. (1) $11^{n+2}+12^{2n+1}$ 必能被 133 所整除;

(2) $4^{2n+1}+3^{n+2}$ 能被 13 整除;

(3) $3^{2n+2}-8n-9$ 能被 64 整除.

12. $2^{2^n}-1$ 及 n^3+2n 都能被 3 整除.

13. 大于 1 的自然数要么是质数,要么是能分解成质数的乘积.

14. A、B 两点各标以红、蓝两色, 在 A、B 的联线上放 n 个不同的点,这些点或为红色或为蓝色,它们把 A、B 两点间的线段分成了 $n+1$ 个只有端点可能相重, 但是没有公共内部点的区间, 则这 $n+1$ 个区间中,两端点的颜色不同的区间数必是奇数.

15. 纵横各为 2^n 格的"围棋棋盘"中共有 $2^n\times 2^n$ 个小方形,去掉这 $2^n\times 2^n$ 个小方形中的任意一个后, 必能全部剪成 ▙ 的形状(三个小方形组成 L 形)而不再剩下任何小方形.

16. $$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\frac{\sin\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}.$$

17. $$\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdots\cos 2^n x=\frac{\sin 2^{n+1}x}{2^{n+1}\sin x}.$$

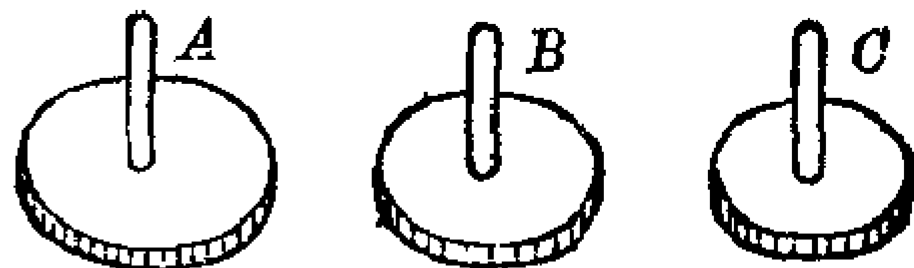
18. 对 $a_n=\underbrace{\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots\sqrt{c+\sqrt{c}}}}}_{n+1\text{ 重根号}}$ $(c>0)$ 中任意的 n, 有

$$a_n<\sqrt{c}+1, \quad 且 \quad a_n\leqslant a_{n+1}.$$

19. 平面上 n 条直线至多能把平面分成 $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ 部分.

[提示: 在平面上已有 k 条直线时, 如果再增加一条直线, 则最多能使平面被分割部分的个数增加 $k+1$ 个.]

*20. 有三个木盘, 每个盘上钉了一根木柱,分别记以 A、B、C. 今在 A 盘的木柱上套放 n 个空心圆木片,



各片分别记以数码 1 至 n, 第 n 号片在最下面,向上顺次为第 $n-1$ 号, …, 最上面为第 1 号, 也就是说,在 A 盘上,木片是按自然数顺

次排列的. 现在我们要把这些木片移至 B 盘上(可以借助于 C 盘), 规则为:

(1) 每次只许移动一个木片;

(2) 不论是在哪个盘上, 同一盘上的木片必须是序号小的在上面. 试证明: 可以通过移动 2^n-1 次, 使 A 盘上的木片全部移到 B 盘上.

21. 证明: 若 $p_1\wedge\cdots\wedge p_n\Rightarrow q$, 则 $p_1\Rightarrow(p_2\rightarrow(p_3\rightarrow\cdots(p_n\rightarrow q)\cdots))$.

第六节 限词与初级谓词演算

6.1 变项与谓词的概念

命题逻辑只能讨论最简单的逻辑问题. 但是即使是最简单的逻辑问题, 命题逻辑还是不够用的, 例如

【例 1】 讨论下列说法是不是命题?

(1) $x=\frac{\pi}{2}$;

(2) $x>y+1$;

(3) $x^2+y^2=z^2$;

(4) 她在音乐学院学习;

(5) 他的哥哥每天自学两小时以上.

解: (1)至(5)都不是命题, 因为 x、y、z、"她"、"他"都是不确定的, 因此无法判定该说法的真假性.

但是, 如果 x、y、z、"她"、"他"分别给定了一个值或某个确定的人, 那么 (1)～(5) 就可以变成一个确切的命题了. 原来的 (1)～(5) 之所以不能成为命题, 就在于 x、y、z、"她"、"他"在变化着. 我们知道: 在代数中 $\sin x$, $\sqrt{x^2+2y-3}$, $e^{2x}+\log z$ 都不是数, 原因在于 x、y、z 等没有给定. 但只要 x、y、z 分别都给定后, 那末 $\sin x$、$\sqrt{x^2+2y-3}$、$e^{2x}+\log z$ 也就

变成了数．在初等代数中这种可以变化的量 x、y、z 等都叫做自变量(或简称“变量”)，而随着变量 x、y、z 给定值后才成为数的 $\sin x$、$\sqrt{x^2+2y-3}$、$e^{2x}+\log z$ 等叫做函数．类似地，在逻辑学中可以变化的、不确定的量 x、y、z、“她”、“他”等也可以叫做变“量”，但是它们都不一定是真正的量，为了确切起见，我们可以把它们叫做变项．(1)至(5)分别类似于初等代数中变量的“函数”，差别只在于：变量换成了更一般的变项，函数值换成了命题．

在初等代数中，一个具体的函数是由某一种对应规则给出的，例如 $\sin x$、$\sqrt{x^2+2y-3}$、$e^{2x}+\log z$ 分别对应于 x、(x, y)、(x, z)．为了应用方便，我们可以分别给这些函数取一些临时的化名，例如令

$$F(x)=\sin x, \quad G(x, y)=\sqrt{x^2+2y-3},$$
$$h(x, z)=e^{2x}+\log z$$

等等．

在逻辑学中象(1)至(5)中变项的那样的“函数”实际上是变项的一种特性或者是各个变项之间的一种关系．例如(1)说明 x 等于 $\frac{\pi}{2}$ 这个特性；(2)与(3)分别是 x、y 之间及 x、y、z 之间的一个关系；(4)与(5)说明“她”或“他”的一种特性(状态)．这种变项的特性或变项之间的关系，在逻辑学中取名叫谓词(即谓语)．与初等代数中函数可以用记号 $F(x)$、$G(x, y)$、$h(x, z)$ 代表相类似，谓词也可以用记号代表．例如我们可以用如下记号表示(1)至(5)中的谓词：

$P_1(x)$ 表示：变项 x 等于 $\frac{\pi}{2}$ $\left(即\ x=\frac{\pi}{2}\right)$；

$G_1(x, y)$ 表示：x 大于 $y+1$；

$F(x, y, z)$ 表示：$x^2+y^2=z^2$；

$SM(x)$ 表示：x 在音乐学院学习（x 表示她）；

$SH(x)$ 表示：x 的哥哥每天自学两小时以上（x 表示他）.

于是上述的 P_1, G_1, F, SM, SH 等都是一个特定的谓词的记号.

在初等代数中变量的变化范围叫做定义域，变量必须在定义域中. 例如

$\sin x$ 的定义域为 $-\infty<x<+\infty$;

$\sqrt{x^2+2y-3}$ 的定义域为 $x^2+2y-3\geqslant 0$ 的所有 (x, y);

$e^{2x}+\log z$ 的定义域为 $-\infty<x<+\infty$, $z>0$.

在逻辑中变项也必须限制在某个范围中，这个范围是由讨论这些谓词的人共同约定的. 这个类似于变量的定义域（变项的范围），我们称它为论域.

以上的概念可以用一个表来比较，并显示其类似的性质：

代数中	(自)变量(数)	函数(值为数)	定义域
逻辑中	变项(个体)	谓词("值"为命题)	论域

形式地，我们可以说：

变项是出现在一个谓词的括号中的"项"，而谓词则是说明这些变项之间的关系或特性.

一个形如 $F(x_1, \cdots, x_n)$ 的谓词叫做 n 个变项的谓词. 我们可以把一个命题看成一个特殊的谓词（即 0 个变项的谓词）.

在一个谓词中，如果给所有的变项以确切的"值"，就得到一个命题，例如在上面的(1)至(5)中(沿用上面所用的记号)：

$P_1(3.14)$ 是一个命题，它取假值 0;

$P_1(\pi)$ 是一个命题，它取真值 1；

$G_1(1, 1)$ 是一个命题，它取假值 0；

SM (小张)，SH (小李)都分别是命题.

从一个谓词得到一个命题的办法除了上面讲的把变项给以特定含义("值")以外，还有用一些专门的形容词的办法，这种形容词叫做限词. 常见的限词有"任何一个"，"存在一个"，"存在唯一的一个"，它们分别用"$\forall$"，"$\exists$"，"$\exists!$"表示. 例如：

$\forall x P_1(x)$ 表示"任何一个 x (此处的论域按一般习惯是指全体实数)都等于 π". 这是一个命题，而且其值为假，即取0值.

$\exists x P_1(x)$ 表示"存在一个实数 x 等于 π". 这是一个命题，它取真值 1；

$\exists! x P_1(x)$ 表示"存在唯一的一个实数 x 等于 π". 这是一个命题，它取真值 1；

$\forall x \forall y G_1(x, y)$ 表示"任何实数 x 和 y 均有 $x>y+1$". 这是一个命题，它取假值 0；

$\forall y \forall x G_1(x, y)$ 表示"任何实数 y 和 x 均有 $x>y+1$". 这是一个命题，它与 $\forall x \forall y G_1(x, y)$ 逻辑相等；

$\forall x \exists y G_1(x, y)$ 表示"对任何实数 x 必存在 y，使 $x>y+1$". 这是一个命题，它取真值 1；

$\exists y \forall x G_1(x, y)$ 表示"存在这样的实数 y，它对任何实数 x 均有 $x>y+1$". 这是一个命题，它取假值 0. 这里还可以看到

$$\exists y \forall x G_1(x, y) \neq \forall x \exists y G_1(x, y);$$

$\exists x \exists y G_1(x, y)$ 表示"存在一个实数 y，对于它存在一个 x，使 $x>y+1$". 这是一个命题，它取真值 1；

$\exists y \exists x G_1(x, y)$ 表示"存在一个实数 x，对于它存在一个 y，使 $x>y+1$". 这是一个命题，它与 $\exists x \exists y G_1(x, y)$ 逻辑相

等，都可以叙述成"存在一对 (x, y) 使 $x>y+1$"。

又如果在 $SM(x)$ 中，论域为"北京市全体妇女"，那末 $\forall xSM(x)$ 表示"北京市一切妇女都在音乐学院学习"。这是一个命题，它显然取假值 0。

$\exists xSM(x)$ 表示"存在一个北京市的女子，她在音乐学院学习"。这是一个命题，它显然取真值 1（因为音乐学院确有女同志在学习）。

$\exists! xSM(x)$ 表示"北京市有且只有一个女子在音乐学院学习"。这是一个命题，它的真假要看具体情况——北京市在音乐学院学习的女子是否只有一人而定。

除了 $\forall$，$\exists$，$\exists!$ 这几个限词外，在数学上有时还会遇到如下的限词：

$\exists_2 xP(x)$ 表示"存在且只存在两个 x 满足性质 P"；

$\exists_n xP(x)$ 表示"存在且恰存在 n 个 x 满足性质 P"；

$\exists_\infty xP(x)$ 表示"存在无穷多个 x 满足性质 P"。

另外，"不存在 x 满足性质 P"，显然可写成 $\sim\exists xP(x)$（以上 $P(x)$ 是表示"变项 x 具有性质 P"这一个谓词）。

以上我们介绍了变项、论域、谓词以及通过哪些方法能从一个谓词得到一个命题。本节中我们不再给出这些术语以严格的数学形式的定义，而让读者通过一些具体的例子与过去熟悉的数学对象相比较，来逐步熟悉这些概念。

变项相当于一个或一些参变"量"，谓词是这些变项的一个特性或一个关系。变项给定了特殊的"值"后，谓词就变成了命题；变项加了"限词"后，谓词也变成命题。这两种方法统称为**把变项约束起来**。一个谓词中经约束后的变项叫做**约束变项**；谓词中没有约束的变项称为**自由变项**。直观上，可以说只有自由变项才是真正"变"的。若一个谓词中的所有变项都

是约束变项，那末这个谓词就变成了命题.

6.2 谓词间的逻辑运算以及它们和限词的关系

与命题间的逻辑运算类似，谓词之间也有运算 $\vee$，$\wedge$，$\sim$，因而也有运算 $\rightarrow$ 及 $\leftrightarrow$. 例如：

$P(x)\vee Q(y)$ 表示"x 具有性质 P 或 y 具有性质 Q". 特别地，如果 $P(\ )$ 与 $Q(\ )$ 有相同的论域 U 时，那末 $P(x)\vee Q(x)$ 表示"x 具有性质 P 或性质 Q"；

$\sim P(x)$ 表示"x 不具有性质 P".

由一些谓词通过某些逻辑运算得到的新谓词称为**复合谓词**. 复合谓词仍可以加限词，例如

【例 1】 若

$H(x)$ 表示"x 是人"；

$C(x)$ 表示"x 必须提高思想觉悟"；

Xiao Li 表示"小李".

那末 $H(x)\rightarrow C(x)$ 是复合谓词，而命题

$\forall x(H(x)\rightarrow C(x))$ 表示"任何人都必须提高思想觉悟"；

H (Xiao Li) 表示"小李是人".

复合谓词加限词后仍是一个复合谓词.

谓词可通过限词变成命题，但是有限词的谓词未必一定是命题，因为原来的谓词可能有多个变项，而限词可能只约束了其中一部分变项. 这样，有限词的谓词有时还是一个谓词而不是命题. 例如：在同一个论域 U（＝全体整数）中，谓词 $F(x,y,z)$ 表示"$x^2+y^2=z^2$"，那末

$\forall x\forall yF(x, y, z)$ 表示"任意整数 x 和 y 均有 $x^2+y^2=z^2$".

它还不是命题，但它是一个谓词，在逻辑含义上相当于"整数

x的平方能表示两个整数的平方和".

有时候，虽然从符号形式上看，好象限词只约束了谓词的一部分变项，但在意义上很可能已经把所有的变项都约束了，从而也就同时把谓词变成了命题。例如谓词 $B(x, y)$ (x, y 属于同一个论域 U, U 中的人彼此不全为兄弟) 表示"x 与 y 是兄弟"，那末

$\forall xB(x, y)$ 表示"任何人与 y 都是兄弟." 这显然永远是假的，因此它是一个命题。这里巧在谓词 $\forall xB(x, y)$ 是恒假的 (即不管什么 y 它都假)，一个恒假的谓词也就退化成了恒假命题.

但是 $\exists xB(x, y)$ 表示"x 是 y 的兄弟". 这就不一定是命题，而是有一个变项 y 的谓词.

在一个带有限词的复合谓词中，限词所涉及到的那一部分谓词称作此限词的范围. 例如在复合谓词 $\forall x(H(x)\to C(x))$ 中限词 $\forall x$ 的范围乃是复合谓词 $(H(x)\to C(x))$.

在一个复合谓词中，某个变项可以在此谓词的一部分中为自由的，而在另一部分中为约束的. 例如 y 在 $(\forall xP(x, y)) \wedge (\forall yQ(y)$ 中就是这样.

注意 在论域为有限集时，限词 $\exists x$ 变成了逻辑运算 $\vee$，限词 $\forall x$ 变成了逻辑运算 $\wedge$. 设论域为 $\{x_1, \cdots, x_n\}$，则对于谓词 $P(x)$，有

$$\exists xP(x) = P(x_1) \vee \cdots \vee P(x_n);$$

$$\forall xP(x) = P(x_1) \wedge \cdots \wedge P(x_n).$$

而
$$\exists ! xP(x) = [P(x_1) \wedge \sim P(x_2) \wedge \cdots \wedge \sim P(x_n)] \vee [\sim P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \sim P(x_3) \wedge \cdots \wedge \sim P(x_n)] \vee \cdots \vee [\sim P(x_1) \wedge \cdots \wedge \sim P(x_{n-1}) \wedge P(x_n)].$$

在数学中，讨论什么是函数的极限或连续性等一般概念时，常常并不限于某个指定的函数，只有在讨论某个函数的极限是什么、是否连续等问题时，才需指定某个函数．类似地，在逻辑学中，讨论谓词的运算或谓词间的关系时，也不局限于一个特定的谓词，而是指一个任意的谓词．这种任意的谓词叫做*谓词变量*，它代表一个抽象的谓词．一个复合的谓词变量叫做一个*谓词公式*．

定义1 如果不论什么论域U，不论谓词公式中取定什么复合谓词，不论如何取定自由变项，而由该谓词得到的命题总是真的，则称这个谓词公式是*恒真的*，或称该谓词公式的论断*总是有效的*；

如果不论什么论域U，不论谓词变量取定什么谓词，不论如何将自由变项取定，而由该谓词得到的命题总是假的，则称这个谓词公式是*恒假的*或*矛盾的*，或称该谓词公式的论断是*不可能满足的*；

如果存在某个论域U，在谓词公式取定某个复合谓词，且把所有自由变项分别取定为某个"值"时，而由该谓词得到的命题是真的，则称这个谓词公式是*可满足的*（当然，恒真谓词公式是一种特殊的可满足的谓词公式）．

定义2 在一个谓词公式中，取定一个论域，取定谓词公式中出现的复合谓词，取定谓词中一切自由变项的"值"，从而得到一个命题，叫做对这个谓词公式的一个*解释*．

一个谓词公式通过一个解释就得到一个命题，通过两个不同的解释，就得到两个不同的命题（当然并不能排斥它们可能取同样的逻辑值1或0）．

按定义2，则定义1可叙述为：

一切解释都得到真值命题的谓词公式称为恒真的，或恒

有效的；

一切解释都得到假值命题的谓词公式称为恒假的或矛盾的或不可能满足的；

只要存在一个解释能得到真值命题的谓词公式称为可满足的.

定义 3 两个谓词公式 A_1 和 A_2 称为**逻辑等价的**，只要它们满足下述条件：

谓词公式"$A_1 \leftrightarrow A_2$"是恒真的.

这也就是说，不论在什么解释下，A_1 与 A_2 得到的两个命题的真假性总是相同的，要么两个命题都真；要么两个命题都假. A_1 与 A_2 逻辑等价记成 $A_1 \equiv A_2$.

定义 4 谓词公式 A_2 称为谓词公式 A_1 的**逻辑推论**，如果满足下述条件.

谓词公式 $A_1 \to A_2$ 是恒真的.

这也就是说，在不论什么解释下，只要由 A_1 得到的命题为真，就一定能推出由 A_2 得到的命题也为真. 把"A_2 是 A_1 的逻辑推论"记成 $A_1 \Rightarrow A_2$.

显然，$A_1 \equiv A_2$ 等价于 $A_1 \Rightarrow A_2$ 且 $A_2 \Rightarrow A_1$.

谓词公式除仍旧可以应用逻辑运算 $\vee$，$\wedge$，$\sim$，$\to$，$\leftrightarrow$ 所满足的规律外，还有逻辑运算与限词之间关系的一些规律：

(I°) 同类限词之间可交换次序

$$\left.\begin{aligned}&\forall x\forall yP(x, y) \equiv \forall y\forall xP(x, y),\\&\exists x\exists yP(x, y) \equiv \exists y\exists xP(x, y),\\&\exists!x\exists!yP(x, y) \equiv \exists!y\exists!xP(x, y).\end{aligned}\right\} \quad (6.1)$$

但是要注意：

$$\left.\begin{aligned}&\forall x\exists yP(x, y) \not\equiv \exists y\forall xP(x, y),\\&\exists x\forall yP(x, y) \not\equiv \forall y\exists xP(x, y).\end{aligned}\right\} \quad (6.2)$$

(II°) 运算中遇到命题或不受限制约束的谓词可以把它放在限词的范围内. 即对于命题 q, 有

$$\left.\begin{array}{l}
(\forall xP(x))\vee q\equiv\forall x(P(x)\vee q),\\
(\forall xP(x)\vee Q(y)\equiv\forall x(P(x)\vee Q(y)),\\
(\forall xP(x))\wedge q\equiv\vee x(P(x)\wedge q),\\
(\forall xP(x)\wedge Q(y)\equiv\forall x(P(x)\wedge Q(y)),\\
(\exists xP(x))\vee q\equiv\exists x(P(x)\vee q),\\
(\exists xP(x)\vee Q(y)\equiv\exists x(P(x)\vee Q(y)),\\
(\exists xP(x))\wedge q\equiv\exists x(P(x)\wedge q),\\
(\exists xP(x)\wedge Q(y)\equiv\exists x(P(x)\wedge Q(y)).
\end{array}\right\}\qquad(6.3)$$

(III°) 对偶律

$$\left.\begin{array}{l}
\sim\forall xP(x)\equiv\exists x(\sim P(x)),\\
(\forall xP(x))\to q\equiv\exists x(P(x)\to q),\\
\sim\exists xP(x)\equiv\forall x(\sim P(x)),\\
(\exists xP(x))\to q\equiv\forall x(P(x)\to q).
\end{array}\right\}\qquad(6.4)$$

(只要记住: $\forall x$ 相当于运算 $\wedge$, $\exists x$ 相当于运算 $\vee$.)

(IV°)

$$\left.\begin{array}{l}
(\forall xP(x))\wedge(\forall xQ(x))\equiv\forall x(P(x)\wedge Q(x)),\\
(\exists xP(x))\vee(\exists xQ(x))\equiv\exists x(P(x)\vee Q(x)).
\end{array}\right\}\qquad(6.5)$$

($\forall$ 本质上就是 $\wedge$; $\exists$ 本质上就是 $\vee$.)

但是

$$\left.\begin{array}{l}
(\forall xP(x))\vee(\forall xQ(x))\not\equiv\forall x(P(x)\vee Q(x)),\\
(\exists xP(x))\wedge(\exists xQ(x))\not\equiv\exists x(P(x)\wedge Q(x)).
\end{array}\right\}\qquad(6.6)$$

(因为在论域为有限集时, $\forall x$ 相当于运算 $\wedge$; $\exists x$ 相当于运算 $\vee$, 所以以上关系是不难理解的.)

为了把谓词公式化成某种标准形式, 我们还要引进如下规律:

(V°)

$$\left.\begin{array}{l}\Diamond xP(x)\vee\odot xQ(x)\equiv\Diamond x\odot y(P(x)\vee Q(y)),\\ \Diamond xP(x)\wedge\odot xQ(x)\equiv\Diamond x\odot y(P(x)\wedge Q(y)).\end{array}\right\}\quad(6.7)$$

其中 $\Diamond$ 和 $\odot$ 或者代表 $\forall$，或者代表 $\exists$.

以上规律中的 (I°)～(IV°) 在这里不给出严格证明，大家可以通过它们的直观含义来理解它们的正确性. 下面举例证明 (V°)：设 $\Diamond$ 和 $\odot$ 都为 $\forall$，那么由于在 $\forall xQ(x)$ 中的 x 是约束了的，所以它实际上不会自由出现，因此 $\forall xQ(x)$ 可以改写为 $\forall yQ(y)$，于是

$$(\forall xP(x))\vee(\forall xQ(x))\equiv(\forall xP(x))\vee(\forall yQ(y))$$
$$\equiv\forall x\forall y(P(x)\vee Q(y))\quad(\text{利用了 (II°)}).$$

定义 5 所有的限词都放在最左面的谓词公式叫做*标准形谓词公式*.

利用上述规律，可以把任意一个谓词公式写成一个与它等价的标准形，其可用步骤为：

1° 首先可用运算 $\vee$、$\wedge$、$\sim$ 代替 $\rightarrow$，$\leftrightarrow$.

2° 可用对偶律把 $\sim$ 号移到限词的右边.

3° 必要时可改动用限词约束的变量记号，例如改写 $\forall xP(x)$ 为 $\forall zP(z)$，改写 $\exists xP(x)$ 为 $\exists zP(z)$ 等.

4° 用规律 (II°)、(IV°)、(V°) 把限词逐步移向最左方.

*【例 2】 试用逻辑学的符号写出

$$\lim_{x\to a}f(x)=l\quad\text{及}\quad\lim_{x\to a}f(x)\neq l.$$

解：当 $f(x)$ 为确定的函数，a、l 固定时，$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ 及 $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq l$ 都是命题，后者是前者的"$\sim$".

在极限理论中，第一个命题的含义为：任给 $\varepsilon>0$，一定存在一个 $\delta>0$，只要 $|x-a|<\delta$，就有 $|f(x)-l|<\varepsilon$.

按逻辑学观点考虑：令 ε、δ、x 为变项，取论域为全体实数，再令谓

词 $P(\varepsilon)$ 表示"ε 为正数". 为了看起来直观, 我们对谓词 $P(\varepsilon)$ 仍用普通的记号"$\varepsilon>0$"表示. 令谓词 $Q(x, \delta)$ 表示"变项 x 与常数 a 的距离小于变项 δ", 谓词 $R(x, \varepsilon)$ 表示"变项 x (实数) 的函数 $f(x)$ 与 l 的距离小于 ε". 同样, 为了看起来直观起见, 我们仍用普通的记号"$|x-a|<\delta$"及"$|f(x)-l|<\varepsilon$"分别代替谓词记号 $Q(x, \delta)$ 及 $R(x, \varepsilon)$. 于是命题 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ 就可以写成:

$$\forall\varepsilon\{\varepsilon>0\to\exists\delta[\delta>0\wedge\forall x(|x-a|<\delta\to|f(x)-l|<\varepsilon)]\}$$

而命题 $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq l$ 是上述命题的否命题, 即是

$$\sim\forall\varepsilon\{\varepsilon>0\to\exists\delta[\delta>0\wedge\forall x(|x-a|<\delta\to|f(x)-l|<\varepsilon)]\}$$
$$\equiv\exists\varepsilon\sim\{\varepsilon>0\to\exists\delta[\delta>0\wedge\forall x(|x-a|<\delta\to|f(x)-l|<\varepsilon)]\}$$
$$\equiv\exists\varepsilon\{\varepsilon>0\wedge\sim\exists\delta[\delta>0\wedge\forall x(|x-a|<\delta\to|f(x)-l|<\varepsilon)]\}$$

(因为 $\sim(p\to q)\equiv p\wedge\sim q$)

$$\equiv\exists\varepsilon\{\varepsilon>0\wedge\forall\delta\sim[\delta>0\wedge\forall x(|x-a|<\delta\to|f(x)-l|<\varepsilon)]\}$$
$$\equiv\exists\varepsilon\{\varepsilon>0\wedge\forall\delta[\delta\leqslant0\vee\sim\forall x(|x-a|<\delta\to|f(x)-l|<\varepsilon)]\}$$
$$\equiv\exists\varepsilon\{\varepsilon>0\wedge\forall\delta[\delta\leqslant0\vee\exists x\sim(|x-a|<\delta\to|f(x)-l|<\varepsilon)]\}$$
$$\equiv\exists\varepsilon\{\varepsilon>0\wedge\forall\delta[\delta\leqslant0\vee\exists x(|x-a|<\delta\wedge\sim(|f(x)-l|<\varepsilon))]\}$$
$$\equiv\exists\varepsilon\{\varepsilon>0\wedge\forall\delta[\delta\leqslant0\vee\exists x(|x-a|<\delta\wedge|f(x)-l|\geqslant\varepsilon)]\}$$
$$\equiv\exists\varepsilon\{\varepsilon>0\wedge\forall\delta[\delta>0\to\exists x(|x-a|<\delta\wedge|f(x)-l|\geqslant\varepsilon)]\}.$$

最后一个式子的含义为: 存在一个 $\varepsilon>0$, 对一切 $\delta>0$, 必定存在 x, 虽然 $|x-a|<\delta$, 但是 $|f(x)-l|\geqslant\varepsilon$.

最后, 我们再看第一个命题的标准形:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$

$$\equiv\forall\varepsilon\{\varepsilon>0\to\exists\delta[\delta>0\wedge\forall x(|x-a|<\delta\to|f(x)-l|<\varepsilon)]\}$$
$$\equiv\forall\varepsilon\{\varepsilon\leqslant0\vee\exists\delta[\delta>0\wedge\forall x([|x-a|\geqslant\delta]\vee[|f(x)-l|<\varepsilon])]\}$$

(注意到谓词"$\varepsilon\leqslant0$"不依赖于 δ, 可用(6.3)得下式)

$$\equiv\forall\varepsilon\exists\delta\{\varepsilon\leqslant0\vee[\delta>0\wedge\forall x([|x-a|\geqslant\delta]\vee[|f(x)-l|<\varepsilon])]\}$$

[谓词"$\delta>0$"中不含变项 x, 故也可用 (6.3) 把 $\forall x$ 放到前面去, 得下式]

$$\equiv\forall\varepsilon\exists\delta\{\varepsilon\leqslant0\vee\forall x[\delta>0\wedge([|x-a|\geqslant\delta]\vee[|f(x)-l|<\varepsilon])]\}$$

[谓词"$\varepsilon\leqslant0$"中不含变项 x, 故也可用(6.3)得下式]

$$\equiv \forall\varepsilon\exists\delta\forall x\{\varepsilon\leqslant 0\vee[\delta>0\wedge[|x-a|\geqslant\delta]\vee[|f(x)-l|<\varepsilon])]\}$$
$$\equiv \forall\varepsilon\exists\delta\forall x\{[\varepsilon\leqslant 0\vee\delta>0]\wedge[\varepsilon\leqslant 0\vee(|x-a|\geqslant\delta)$$
$$\vee(|f(x)-l|<\varepsilon)]\}$$
(或 $\equiv \forall\varepsilon\exists\delta\forall x\{[\varepsilon>0\rightarrow\delta>0]\wedge[\varepsilon>0\rightarrow(|x-a|\geqslant\delta)$
$\vee(|f(x)-l|<\varepsilon)]\}$
$$\equiv \forall\varepsilon\exists\delta\forall x\{\varepsilon>0\rightarrow(\delta>0\wedge[(|x-a|\geqslant\delta)\vee(|f(x)-l|<\varepsilon)])\}$$
$$\equiv \forall\varepsilon\exists\delta\forall x\{\varepsilon>0\rightarrow(\delta>0\wedge(|x-a|\geqslant\delta))$$
$$\vee(\delta>0\wedge(|f(x)-l|<\varepsilon)\}).$$

6.3 谓词的逻辑推理

为了使推理的适用范围能够稍广，并且表达方式可以简化，我们要对谓词的概念作一些扩充：首先回忆一下在6.1中介绍的谓词概念，在那里所述的谓词的一般形式为

$$P(x_1,\ \cdots,\ x_n),$$

其中 $x_1,\ \cdots,\ x_n$ 为变项，当这些变项约束起来后，谓词 $P(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 就转化成命题了。

用这样的方式表达“与其紧后面一个原子序数的元素在常温下具有同一相（气、液、固三相之一）的元素”这个概念时，就要引入谓词 $L(x,\ y)$ 表达“y 的原子序数比 x 的原子序数多1”，谓词 $B(x,\ y)$ 表达“y 与 x 在常温下具有同一相”，然后得到谓词表达式：

$$L(x,\ y)\wedge B(x,\ y).$$

但是，如果我们细细考察，就可以发现 y 与 x 是在同一个论域“一切天然元素”中的，而且 y 对 x 有很强的依赖关系——原子序数多1. 从 x 变到所对应的 y 时并未超出原来的论域。因此，可以把 y 看成 x 的一个“对应物”（对应元素），由 x 找 y 是根据一种对应关系——原子序数加1——而得到的。这种由论域中的每个元素 x 根据某个确定的对应规则对应到原论

域中的一个确定的元素的对应关系，在逻辑学中也叫做函数(它是数值函数的推广，在论域为实数时，就得到普通的函数关系)．在上面的例子中，我们可以用函数 $l(x)$ 表示"比 x 的原子序数多1的元素"，于是，我们提到的概念可以写成更简单的形式：

$$B(x, l(x)).$$

这就是说，谓词 B 的括号内的部分不仅可以出现变项 x，也可以出现变项的函数 $l(x)$．另外，变项也可以看成是一种特殊的函数(例如 x 对应于 x)，所以一般地说，谓词中的括号内是一些变项的函数．更为一般的简单谓词形式为

$$P(f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m)),$$

其中 $x_1, \cdots, x_m$ 为变项，$f_i(x_1, \cdots, x_m)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 是变项 $x_1, \cdots, x_m$ 的函数(其含义为：$x_1, \cdots, x_m$ 均在同一个论域 U 中，对于一组 $(x_1, \cdots, x_m)$ 对应于论域中的另一个元素 $f_i(x_1, \cdots, x_m)$，函数 f_i 表示这种对应关系)．

例如在上面的例子的记号下，如果 $c(x)$ 表示"与 x 原子量最相近的同位素"，那末

$$\exists x[\sim B(c(x), l(x))]$$

就表示"有些元素的原子量最相近的同位素与比它的原子序数多1的元素在常温下具有不同的相"．

再如论域 U 为全体实数时，若以谓词

$$\text{BuXiaoYu}(x, y)$$

表示"$x \geqslant y$"，以 Jia (x, y) 表示"$x+y$"，以 Cheng (x, y) 表示函数"x 乘 y"，那末谓词(实际是命题)

$$\forall x \forall y \text{BuXiaoYu}[\text{Jia}(\text{Cheng}(x, x), \text{Cheng}(y, y)), \text{Cheng}(2, \text{Cheng}(x, y))]$$

表示"不论什么实数 x，y 均有 $x^2+y^2 \geqslant 2xy$"．

现在我们来分析一段推理："每个三角形三个内角之和为 π，直角三角形是三角形，因此直角三角形的三个内角之和为 π"．如何把它变成机器也能做的逻辑形式推理呢？如果用第四节中的命题逻辑，那就是命题

p 表示"每个三角形三内角之和为 π"；
q 表示"直角三角形是一个三角形"；
r 表示"直角三角形三内角之和为 π"．

这样，无论用第四节中哪些推理规律都不能证实上面的一段推理的正确性，因为从前提 p 及 q 是不能得到结论 r 的．但是用本节中所介绍的谓词概念就可以证明上面的一段推理是正确的．为此，令论域为所有平面多边形，x 为一个平面图形，谓词 $T(x)$ 表示"x 是三角形"，$R(x)$ 表示"x 是直角三角形"，$P(x)$ 表示"x 的所有内角和为 π"，那末，上面的一段推理是否正确就表现为：从前题 $\forall x(T(x)\to P(x))$ 及 $\forall x(R(x)\to T(x))$ 是否能得到逻辑结果（结论）$\forall x(R(x)\to P(x))$？也就是问

$$[\forall x(R(x)\to T(x))]\wedge[\forall x(T(x)\to P(x))]$$
$$\Rightarrow\forall x(R(x)\to P(x))?$$

事实上这是对的（下面即将证明），而且上面的推理形式即

前提　$\forall x(P(x)\to Q(x))$，　$\forall x(Q(x)\to R(x))$，
结论　$\forall x(P(x)\to R(x))$．

这叫做谓词推理中的**三段论**，它也是谓词推理中的基本规律之一．

为了能简捷地判断哪些谓词推理是正确的，哪些是不容许的，首先就需要总结一些基本推理规律．除基本规律(6.1)～(6.7)外，还有(IV°)的补充(IV°°)：

(IV°°) $\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)\Rightarrow\forall x(P(x)\vee Q(x))$,

$$\exists x(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow\exists xP(x)\wedge\exists Q(x). \quad (6.8)$$

及以下规律

(VI°) $\forall xP(x)\Rightarrow P(x_0)\Rightarrow\exists xP(x)$

(x_0在论域中固定),

$P(x)\Rightarrow\forall xP(x)$

(x未约束,是任意固定的). (6.9)

(VII°) $\exists x(P(x)\to Q(x))\equiv\forall xP(x)\to\exists xQ(x)$,

$\exists xP(x)\to\forall xQ(x)\Rightarrow\forall x(P(x)\to Q(x))$,

$\forall x(P(x)\to Q(x))\Rightarrow\forall xP(x)\to\forall xQ(x)$. (6.10)

(VIII°) (带限词 ∀ 的三段论)

$$\forall x(P(x)\to Q(x))\wedge\forall x(Q(x)\to R(x))$$

$$\Rightarrow\forall x(P(x)\to R(x)). \quad (6.11)$$

对以上诸规律证明如下:

(VI°)的证明:关系

$$\forall xP(x)\Rightarrow P(x_0)\Rightarrow\exists xP(x)$$

是显然的. 现证

$$P(x)\Rightarrow\forall xP(x).$$

如果左边为真,那就是在x任意固定时,命题$P(x)$为真. 既然x可以是任意的,那就是说"对任意的x, $P(x)$都为真". 这就是说: $\forall xP(x)$为真. 因此

$$P(x)\Rightarrow\forall xP(x).$$

注意$P(x)$中的x是任意固定的,而不是限于只能取特殊的某一个x_0. 例如在论域为实数时,x可以是任意一个固定实数,但不能限于只取某个特殊的实数(例如$\sqrt{2}$),所以$P(x_0)\not\Rightarrow\forall xP(x)$. 务必要分清楚:

$$P(x)\Rightarrow\forall xP(x)$$

与 $$P(x_0)\nRightarrow\forall xP(x).$$

(IV°°) 的证明：

首先应注意：在"⇒"号两边的谓词实际上是命题(因为变项都是被约束了的).

如果 (IV°°) 中第一个关系⇒的左边 $\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$ 为真，这时可分两种情形：$\forall xP(x)$ 为真，或者 $\forall xQ(x)$ 为真。不妨设 $\forall xP(x)$ 为真 (因为在 $\forall xQ(x)$ 为真的情形是完全类似的)，由 (VI°) 可知 $P(x)$ 为真，因而 $P(x)\vee Q(x)$ 为真，再由 (VI°) 中第二个关系可知 $\forall x(P(x)\vee Q(x))$ 为真，因此

$$\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)\Rightarrow\forall x(P(x)\vee Q(x)).$$

第二个关系是第一个关系的对偶关系，证明如下：

$$\exists x(P(x)\wedge Q(x))\equiv\sim\sim\exists x(P(x)\wedge Q(x))$$
$$\equiv\sim\forall x[\sim(P(x)\wedge Q(x))]\ \text{(对偶律 III°)}$$
$$\equiv\sim\forall x[\sim P(x)\vee\sim Q(x)]$$

但是由第一个关系，有(对 $\sim P(x)$, $\sim Q(x)$ 用第一个关系)

$$\forall x(\sim P(x)\vee\forall x(\sim Q(x))\Rightarrow\forall x(\sim P(x)\vee\sim Q(x)).$$

因而就有

$$\sim\forall x(\sim P(x)\vee\sim Q(x))$$
$$\Rightarrow\sim[\forall x(\sim P(x))\vee\forall x(\sim Q(x))]$$

但以上关系的左边等于

$$\exists x(P(x)\wedge Q(x));$$

右方等于(按对偶律 (III°))

$$[\sim\forall x(\sim P(x))\wedge\sim\forall x(\sim Q(x))]$$
$$\equiv\exists x(\sim\sim P(x))\wedge\exists(\sim\sim Q(x))$$
$$\equiv\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x).$$

因此 $$\exists x(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x).$$

(VII°) 的证明：第一个关系式

$$\begin{aligned}\exists x(P(x)\to Q(x)) &\equiv \exists x(\sim P(x)\vee Q(x))\\ &\equiv \exists x(\sim P(x))\vee\exists xQ(x)\quad （根据(6.5)）\\ &\equiv \sim\forall xP(x)\vee\exists xQ(x)\quad （根据(6.4)）\\ &\equiv \forall xP(x)\to\exists xQ(x);\end{aligned}$$

第二个关系式

$$\begin{aligned}\exists xP(x)\to\forall xQ(x) &\equiv \sim\exists xP(x)\vee\forall xQ(x)\\ &\equiv \forall x(\sim P(x))\vee\forall xQ(x)\\ &\overset{(\mathrm{IV}^{\circ\circ})}{\Rightarrow} \forall x(\sim P(x)\vee Q(x))\equiv\forall x(P(x)\to Q(x));\end{aligned}$$

第三个关系式：如果 $\forall x(P(x)\to Q(x))$ 为真，那末 $P(x)\to Q(x)$ 为真，这时可分两种情形，第一种情形：$\forall xP(x)$ 为假，那末 $\forall xP(x)\to\forall xQ(x)$ 为真（因为假条件的条件命题取真值）；第二种情形：$\forall xP(x)$ 为真，那末 $P(x)$ 为真，加上已得的 $P(x)\to Q(x)$ 为真，再由 (4.1) 中的 (L_3) 就得到 $Q(x)$ 为真，但 $Q(x)\to\forall xQ(x)$ ((VI°))，因此 $\forall xQ(x)$ 为真，但是此时 $\forall xP(x)$ 为真，所以 $\forall xP(x)\to\forall xQ(x)$ 为真．这就得到了第三个关系式．

(VIII°) 的证明：由 $\forall x(P(x)\to Q(x))$ 及 $\forall x(Q(x)\to R(x))$ 为真，可得 $P(x)\to Q(x)$ 及 $Q(x)\to R(x)$ 为真．再由 (4.1) 中的 (L_3) 可知 $P(x)\to R(x)$ 为真．应用 (6.5)（即

$$P(x)\to R(x)\Rightarrow\forall x(P(x)\to R(x))),$$

就得到 $\forall x(P(x)\to R(x))$ 为真．▌

逻辑运算 $\vee$、$\wedge$、$\sim$ 的规律，命题逻辑推理的规律 (4.1) 中的 (L_1) 至 (L_9)，谓词逻辑的规律 (6.1) 至 (6.11)（即 (I°) 至 (VIII°)）等是最基本的规律．在用计算机证明逻辑结论及判断逻辑推理时，往往先把这些基本规律存贮于计算机的存贮设备中供随时调用．

下面举例说明如何应用这些规律作一些简单的逻辑推理.

【例 1】 求证由前提 $\forall x(P(x)\to Q(x))$ 及 $\exists xP(x)$ 可得到逻辑结论 $\exists xQ(x)$.

【证】

$$\exists xP(x)\xrightarrow{(\text{VI}^\circ)}P(x_0).$$

$$\forall x(P(x)\to Q(x))\xrightarrow{(\text{VI}^\circ)}\underline{P(x_0)\to Q(x_0)\quad}$$

$$\therefore\ Q(x_0)\Rightarrow\exists xQ(x).$$

(由(4.1)中(L_3)) (由(VI°))

由这个表可以看出：从 $\exists xP(x)$ 及 $\forall x(P(x)\to Q(x))$ 可推出 $\exists xQ(x)$. 】

【例 2】 求证由前提

$$\exists x(P(x)\land Q(x))\to\forall y(R(y)\to S(y)),$$
$$\exists y(R(y)\land\sim S(y))$$

可以得到逻辑结论 $\forall x(P(x)\to\sim Q(x))$.

【证】 根据 $\sim(p\to q)=p\land\sim q$ 及对偶律(6.4)可知

$\exists x(P(x)\land Q(x))\to\forall y(R(y)\to S(y))$

$\exists y(R(y)\land\sim S(y))\qquad\qquad\equiv\sim\forall y(R(y)\to S(y))$

由(4.1)中的(L_2) $\therefore\ \sim\exists x(P(x)\land Q(x))$

$\equiv\forall x(P(x)\to\sim Q(x))$. 】

【例 3】 求证 $\forall x(P(x)\lor Q(x))\Rightarrow\forall xP(x)\lor\exists xQ(x)$.

【证】 由(6.4)：

$$\forall x(P(x)\lor Q(x))\land\forall x(\sim Q(x))\equiv\forall xP(x),$$

即
$$\forall x(P(x)\lor Q(x))\land\sim\exists xQ(x)\equiv\forall xP(x).$$

所以有

$$[(\forall x(P(x)\vee Q(x))\wedge\sim\exists xQ(x))\to\forall xP(x)]\equiv\mathbf{1}.$$

但由于(4.1)中 (L_6) 的左边等价于

$$\forall x(P(x)\vee Q(x))\to(\sim\exists xQ(x)\to\forall xP(x))$$
$$\equiv\forall x(P(x)\vee Q(x))\to(\exists xQ(x)\vee\forall xP(x)).$$

因此 $[\forall x(P(x)\vee Q(x))\to\exists xQ(x)\vee\forall xP(x)]\equiv\mathbf{1}.$

这就是所要证明的. ▌

在第五节中曾讲过数学归纳法，在那里出现的命题 $P(n)$ 是依赖一个整值参数 n 的命题，更严格地说，$P(n)$ 是一个谓词，n 是变项，它在论域"某些连续整数"中变动. 于是数学归纳法写成谓词推理的形式就应是：

$$P(k_0),\ \forall n(P(n)\to P(n+1))\Rightarrow\forall x[(x\geqslant k_0)\to P(x)].$$

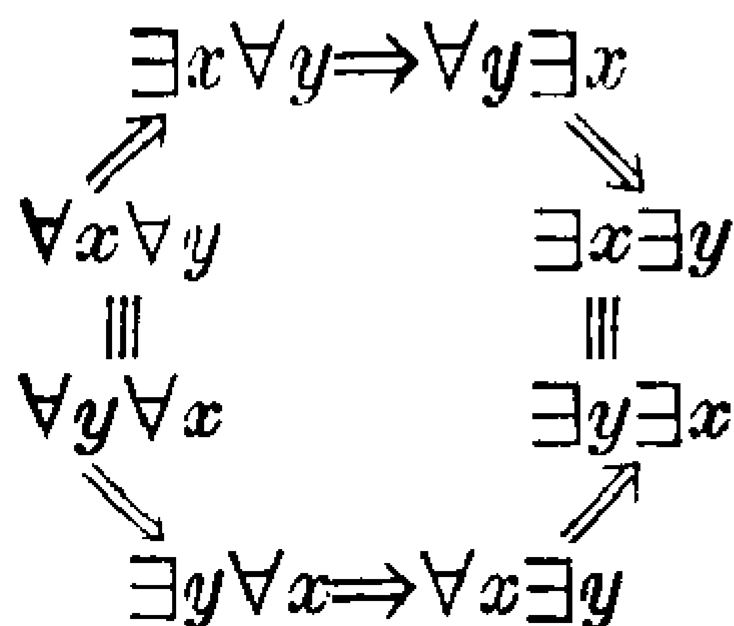
这里"$x\geqslant k_0$"表示谓词"变项 $x\geqslant k_0$".

在多个限词先后同时出现在一个谓词中时，除了运用规律(6.1)的 (I°) 外，还有下列补充：

$$(\mathrm{I}^{\circ\circ})\qquad \forall x\forall yP(x,y)\Rightarrow\exists y\forall xP(x,y)$$
$$\Rightarrow\forall x\exists yP(x,y)\Rightarrow\exists x\exists yP(x,y).$$

这是因为"$\forall x\forall yP(x,y)$ 为真"说明对一切固定的 x, y 及命题 $P(x,y)$ 都为真，"$\exists y\forall xP(x,y)$ 为真"说明有某个 y_0，对一切固定的 x，命题 $P(x,y_0)$ 都为真，"$\forall x\exists yP(x,y)$ 为真"说明对一切固定的 x，存在一个 $y(x)$ (y 依赖于 x，所以记为 $y(x)$)，命题 $P(x,y(x))$ 为真，最后"$\exists x\exists yP(x,y)$ 为真"说明有一对 (x^*,y^*)，使 $P(x^*,y^*)$ 为真. 由以上解释的含义知规律 $(\mathrm{I}^{\circ\circ})$ 的成立是易于看出的.

以上的各种限词转换后，出现的"蕴涵"关系，可画成下面图示的形式：



【例 4】 证明下述论断的正确性:

有些病人喜欢一切医生,但是没有一个病人喜欢庸医,因此凡医生都不是庸医.

解: 令

$P(x)$ 表示"x 是病人",

$D(y)$ 表示"y 是医生",

$Q(y)$ 表示"y 是庸医",

$L(x, y)$ 表示"x 喜欢 y".

那末

"有些病人喜欢一切医生",即

$$\exists x(P(x)\wedge\forall y(\sim D(y)\vee L(x, y)))$$
$$\equiv\exists x(P(x)\wedge\forall y(D(y)\rightarrow L(x, y))).$$

"没有一个病人喜欢庸医",即

$$\sim\exists x(P(x)\wedge\exists y(Q(y)\wedge L(x, y)))$$
$$\equiv\forall x(\sim P(x)\vee\sim\exists y(Q(y)\wedge L(x, y)))$$
$$\equiv\forall x[\sim P(x)\vee\forall y(\sim Q(y)\vee\sim L(x, y))]$$
$$\equiv\forall x[\sim P(x)\vee\forall y(L(x, y)\rightarrow\sim Q(y))].$$

"凡医生都不是庸医",即

$$\forall y(D(y)\rightarrow\sim Q(y)).$$

我们把推理写成下述"表"的直观形式:

前提

$$\exists x[P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))]\overset{(6.9)}{\Longrightarrow}\text{某 } x_0:\ P(x_0)\wedge\forall y(D(y)\to L(x_0,y))\cdots$$

$$\underline{\forall x[\sim P(x)\vee\forall y(L(x,y)\to\sim Q(y))]}\overset{(6.9)}{\Longrightarrow}\ \underline{\sim P(x_0)\vee\forall y(L(x_0,y)\to\sim Q(y))\cdots}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cdots\Rightarrow\begin{cases}\forall y(D(y)\to L(x_0,y))\\ P(x_0)\end{cases}\\ \cdots\equiv\sim P(x_0)\vee\forall y(L(x_0,y)\to\sim Q(y))\end{array}\right\}\overset{(6.1)\text{中的}(L_4)}{\Longrightarrow}\ \begin{array}{l}\forall y(D(y)\to L(x_0,y))\\ \underline{\forall y(L(x_0,y)\to\sim Q(y))}\end{array}$$

$$(6.11)(\text{三段论})\quad\therefore\ \forall y(D(y)\to\sim Q(y)).$$

从而得到逻辑结论:"凡医生都不是庸医". 但是这个结论的内容却并不一定是正确的,它只是作为前提"有些病人喜欢一切医生及没有病人喜欢庸医"的逻辑推论. 只要前提真,逻辑推论就必然真. 如果这个结论的内容与日常的认识不符合,那就应该怀疑前提内容的正确性. 事实上,本例中前提"有些病人喜欢一切医生"就是不正确的. 所以推致结论不正确. 从本例我们可以得到两点启示:

1° 逻辑推论(不论是命题逻辑还是谓词逻辑)只保证推理形式的正确性, 即在某些前提成立下必然保证逻辑结论成立,但丝毫不涉及前提与结论的内容是否合理.

2° 如果逻辑结论的内容不合理,那就必然能在前提中找到不合理的内容.

*【例 5】 从下列前提分析可以得到什么样的逻辑结论?

(1) 只有确信为正确的定理才可能是重要的;

(2) 在牛顿的工作中,证明都是直观的;

(3) 不严格的证明不能确信其正确性;

(4) 第一流的数学家至少证明了一个重要的定理;

(5) 严格的证明不可以引用直观的论据.

解: 令 x 表示"一个定理",

$I(x)$ 表示"x 是重要的",

$C(x)$ 表示"x 是确信为正确的",

$N(x)$ 表示"x是牛顿证明的",

$H(x)$ 表示"x的证明是直观的",

y 表示"一个数学家", N 表示"牛顿",

$y(x)$ 表示"定理 x 是数学家 y 所证明的",

$m(y)$ 表示"y 是第一流数学家",

$R(x)$ 表示"x 的证明是严格的".

于是五个前提(1)～(5)分别表示为

(1) $\forall x(I(x)\to C(x))$.

(2) $\forall x(N(x)\to H(x))\equiv\forall x(\sim H(x)\to\sim N(x))$.

(3) $\forall x(\sim R(x)\to\sim C(x))\equiv\forall x(C(x)\to R(x))$.

(4) $\forall y(m(y)\to\exists x(y(x)\wedge I(x)))\Rightarrow m(N)\to\exists x(N(x)\wedge I(x))$.

(5) $\forall x(H(x)\to\sim R(x))\equiv\forall x(R(x)\to\sim H(x))$.

我们要证明逻辑结论:"牛顿不是第一流的数学家",即 $\sim m(N)$.

用反证法,假定结论不对,那末 $m(N)$ 成立;由 (4) 及 (6.1) 中的 (L_3) 可知: $\exists x(N(x)\wedge I(x))$ 成立(真),所以存在某个 x_0, 使 $N(x_0)\wedge I(x_0)$ 成立;但另一方面,由 (1): $I(x_0)\to C(x_0)$ 成立;由 (3): $C(x_0)\to R(x_0)$ 成立;由 (5): $R(x_0)\to\sim H(x_0)$ 成立;由 (2): $\sim H(x_0)\to\sim N(x_0)$ 成立. 因而多次应用三段论法 (6.1) 中的 (L_3) 可知: $I(x_0)\to\sim N(x_0)$ 成立. 这与 $N(x_0)\wedge I(x_0)$ 成立相矛盾,因为

$$\begin{array}{l} I(x_0)\to\sim N(x_0)\\ N(x_0)\\ I(x_0)\\ \hline \therefore\ N(x_0)\wedge\sim N(x_0)\equiv\mathbf{0}. \end{array}$$

这里所以会导致矛盾 $\mathbf{0}$ (逻辑不可能事件),就是因为我们预先假设了 $m(N)$ 成立. 因此,结论是 $\sim m(N)$, 即"牛顿不是第一流的数学家".

这个例子与上例一样,作为前提的推论而得到的逻辑结论是无误的,但其内容是不合理的,因为众所周知,牛顿是第一流的数学家. 这里之所以会出现不合理的结论,其原因在于前提(4)不合理,它断言"第一流的数学家至少证明了一个重要定理". 而事实并非如此,有些第一

流数学家(例如牛顿)就是发现了重要定理,但并未给出严格证明;大家所熟知的哥德巴赫也是这样一位数学家.

归纳本节要点

本节的主要内容是谓词、谓词公式的标准形及谓词推理.

最简单的谓词可以看成是带有一些"参量"——变项的"命题". 只有把这些变项给以固定值或者用"泛指限词"$\forall$、"特指限词"$\exists$ 等加以约束起来,才能成为真正的命题. 在对偶律及一些其他的规律中,限词 $\forall$、$\exists$ 分别与运算 $\wedge$、$\vee$ 相似.

较复杂的谓词中的"参量"可以是变项的"函数".

把谓词公式化成标准形是一种可以用计算机判别谓词恒等式的办法.

在一些前提下的逻辑推论实际上也是一种谓词恒等式($H_1\wedge\cdots\wedge H_n\Rightarrow S$ 即 $H_1\wedge\cdots\wedge H_n\wedge\sim S\equiv\mathbf{0}$). 因此在原则上也可以通过化成标准形的办法用计算机来判断. 但是,使用一些简单的推理规律[例如三段论,(4.1)中的$(L_1)\sim(L_9)$,(6.1)~(6.11)(即 (I°)~(VIII°)) 等]可以使推理过程更为简捷.

逻辑推理形式的正确性与命题或谓词本身的含义无关,它只讨论在某些前提下有什么结论.

习　题　2·6

1. 把下列句子表达成谓词的形式:
   (1) 有且只有一个偶质数;
   (2) 火车比某些汽车快;
   (3) 有些汽车比任何火车都慢,但至少有一列火车比一切汽车都快;
   (4) $x^2=2$ 当且仅当 $x=\sqrt{2}$ 或 $x=-\sqrt{2}$ 时才成立.

2. 试用 $\forall$、$\exists$、逻辑运算及适当的谓词来表达限词 $\exists!$ 所限定的

$$\exists!xP(x).$$

3. 证明下列逻辑等价式或逻辑推论关系：

   (1) $\forall x(p\to Q(x))\equiv p\to\forall xQ(x)$;

   (2) $\exists xP(x)\wedge\forall xQ(x)\Rightarrow\exists x(P(x)\wedge Q(x))$;

   (3) $\sim(\exists xP(x)\wedge Q(y))\Rightarrow(\exists x)(P(x)\to\sim Q(y))$;

   (4) $\forall x(P(x)\vee Q(x))\wedge\forall x\sim P(x)\Rightarrow\exists xQ(x)$.

4. 若论域 U 是有限集，试验证下列关系（变项 x, y 取自 U）：

   (1) $\exists x(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)$;

   (2) $\forall x(P(x)\leftrightarrow Q(x))\Rightarrow\forall xP(x)\leftrightarrow\forall xQ(x)$;

   (3) $\forall x\forall y(P(x)\vee Q(y))\equiv\forall xP(x)\vee\forall yQ(y)$,

   $\forall x\forall y(P(x)\wedge Q(y))\equiv\forall xP(x)\wedge\forall yQ(y)$;

   (4) $\exists x\exists y(P(x)\wedge Q(y))\Rightarrow\exists xP(x)$;

   (5) $\exists x\exists y(P(x)\to Q(y))\equiv\forall xP(x)\to\exists yQ(y)$,

   $\forall x\forall y(P(x)\to Q(y))\equiv\exists xP(x)\to\forall yQ(y)$.

5. 把 $\forall xP(x)\to\exists xQ(x)$ 化成标准形.

6. 试判别下述关系中哪些是正确的?

   (1) $\forall x(P(x)\to Q(x))\Rightarrow\forall xP(x)\to\forall xQ(x)$;

   (2) $\forall xP(x)\to\forall xQ(x)\Rightarrow\forall x(P(x)\to Q(x))$;

   (3) $\forall x(P(x)\to Q(x))\Rightarrow\exists xP(x)\to\forall xQ(x)$;

   (4) $\exists xP(x)\to\forall xQ(x)\Rightarrow\forall xP(x)\to\forall xQ(x)$.

7. 所有的三角函数都是周期函数，一切周期函数都是连续函数，由此能推出什么逻辑结论？这个结论的内容是否合理？为什么？

第二章小结

本章主要讲了下述问题：

1. 由简单命题构成复合命题有正反两个问题：

   正问题：求复合命题的真假表；

   反问题：求具有给定真假表的复合命题（设计问题）.

2. 运算 $\vee, \wedge, \sim, \rightarrow, \leftrightarrow$ 及其含义，前三个是基础.
3. 命题的化简，标准形及逻辑等价.
4. 恒真命题及恒假命题的特殊作用.
5. 判断一个推理形式(不管被推理的内容)是否正确.
6. 归纳的方法.
7. 谓词、谓词与命题的比较，把谓词约束成命题的各种方式，判断一个带有谓词的推理形式是否正确.

第三章

关系、映射与运算

本章介绍一些基本的数学概念．在我们研究某些实际问题的数量或类似于数量的关系时，常常会遇到这些概念．它们涉及诸如：在同一个集合中，每两个元素之间是否符合某种给定的关系；两个集合之间的某种对应关系及其性质；按照某种指定的要求给出元素间的一种"运算"，并研究它所满足的规律等等问题．

第一节　关系、关系的表示与关系间的运算

1.1　集合 X 内的关系

设有一个全集 X，我们暂不假定它是有限集．与有限集的情形完全类似地可以定义它的笛卡儿乘积：

$$X\times X=\{(x,\ y)\,|\,x\in X,\ y\in X\}.$$

例如 X = 全体实数（即实轴 R），则 $X\times X$ 为实平面，$X\times X$ 中的任一个元素 $(x,\ y)$ 表示在平面上坐标为 $(x,\ y)$ 的点．

在 X 为有限集时，$X\times X$ 的含义在第一章中已经阐述清楚了．

对于 X 中的两个元素 x 与 y，我们常常需要考虑它们之间是否满足某个确定的关系，例如当 $X=R$ 时，关系"$\leqslant$"表示"$x\leqslant y$"；关系"$=$"表示"$x=y$"．又如"$x^2+y^2\leqslant 1$"，"$x^2-y^2=1$"等也各表示 x 和 y 之间的一种关系．又若 X 表示某

中学的全体学生,那末,“同年级”就表示 x 与 y 的一种关系(x 和 y 各表示一个学生);“同班”也表示一种关系.“认识”是一种关系——表示“x 认识 y”;“友好”也是一种关系——表示“x 对 y 友好”,….

为了研究一个关系的性质,我们需要把“某一个关系”到底是一个什么样的数学对象搞清楚,也就是要抽象出“某一个关系”的数学实质来.例如,在大家所熟悉的两个实数之间的某些关系中,实轴 R 上的某个关系常和平面 $R\times R$(有时记成 R^2)上某个确定的图形(更确切地说,是 R^2 的某个子集)相联系,如

【例 1】 关系$\leqslant$联系闭的半平面$\{(x, y)\,|\,x\leqslant y\}$;

关系$=$联系直线$\{(x, y)\,|\,x=y\}$;

关系 $x^2+y^2\leqslant 1$ 联系圆盘$\{(x, y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$;

关系 $x^2-y^2=1$ 联系双曲线$\{(x, y)\,|\,x^2-y^2=1\}$.

我们把某个确定的关系用黑体拉丁字母 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{G}$、…等表示.此例说明了:给定了一个“关系” $\boldsymbol{G}$,就知道了满足这个关系的 x 和 y 组成的集合$\{(x, y)\,|\,x$ 和 y 满足关系 $\boldsymbol{G}\}$,这个集合是 $R\times R$ 的一个子集.反之,如果任给两个元素 x、y 所划定的(x, y)的一个集合 G(即 $R\times R$ 的一个子集),那末也可以确定某个关系 $\boldsymbol{G}$,即

认为 x 与 y 有某个关系 $\boldsymbol{G}$,只要$(x, y)\in G$.这样,任给了 x 和 y,我们都能说出它是否满足关系 $\boldsymbol{G}$,也就是说:关系 $\boldsymbol{G}$ 完全由 $R\times R$ 的子集 G 所确定.

把上面的例子作为背景,我们可以总结出下面较抽象的概念.

定义 1 设 G 为笛卡儿积 $X\times X$ 的一个子集,称 $\boldsymbol{G}$ 为 X 内的一个“关系”;对于任给的 x、$y\in X$,如果$(x, y)\in G$,

则称 x、y 有关系 $\boldsymbol{G}$，记成 $x\boldsymbol{G}y$；否则就称 x、y 不满足关系 $\boldsymbol{G}$，记成 $x\overline{\boldsymbol{G}}y$.*)

在 X 为有限集时(设 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$)，一个关系 $\boldsymbol{R}$ 可以有两种很直观的表达方式：

1) 表示关系 $\boldsymbol{R}$ 的直观形象的第一种方法——图形法

把元素 1、2、…、n 分别用平面上的 n 个点表示，如果 $1\boldsymbol{R}2$，则从 1 到 2 画一条线，并注明 1 到 2 的方向，用由 1 指向 2 的箭头表示；如果还有 $2\boldsymbol{R}1$，则再加一个从 2 到 1 的箭头；如果 $1\boldsymbol{R}1$，则从 1 画一个带箭头的圈(这圈不经过其它点)。例如图 3-1 表示 $X=\{1, 2, \cdots, 6\}$，$G=\{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 3), (5, 5)\}$，由 $X\times X$ 的子集 G 确定的关系 $\boldsymbol{G}$ 为：

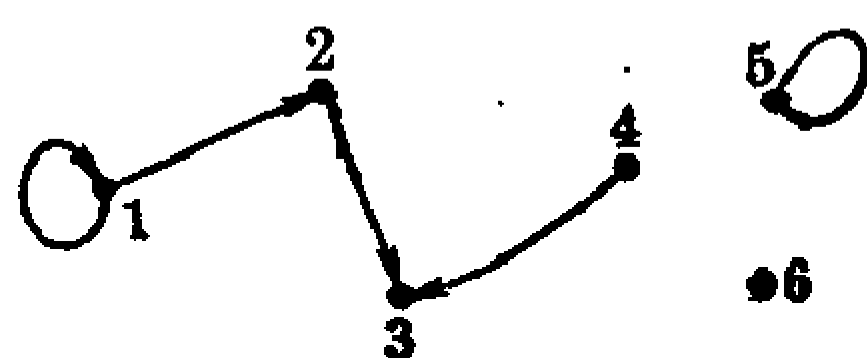


图 3-1

$$1\boldsymbol{G}1,\ 1\boldsymbol{G}2,\ 2\boldsymbol{G}3,\ 3\boldsymbol{G}2,\ 4\boldsymbol{G}3,\ 5\boldsymbol{G}5.$$

并且有

$$1\overline{\boldsymbol{G}}3,\ 1\overline{\boldsymbol{G}}4,\ 1\overline{\boldsymbol{G}}5,\ 1\overline{\boldsymbol{G}}6,\ 2\overline{\boldsymbol{G}}1,\ 2\overline{\boldsymbol{G}}2,\ 2\overline{\boldsymbol{G}}4,$$
$$2\overline{\boldsymbol{G}}5,\ 2\overline{\boldsymbol{G}}6,\ 3\overline{\boldsymbol{G}}1,\ 3\overline{\boldsymbol{G}}3,\ 3\overline{\boldsymbol{G}}4,\ 3\overline{\boldsymbol{G}}5,\ 3\overline{\boldsymbol{G}}6,$$
$$4\overline{\boldsymbol{G}}1,\ 4\overline{\boldsymbol{G}}2,\ 4\overline{\boldsymbol{G}}4,\ 4\overline{\boldsymbol{G}}5,\ \cdots.$$

图 3-1 称为表示关系 $\boldsymbol{G}$ 的图形.

2) 表示关系 $\boldsymbol{R}$ 的直观形象的第二种方法——表格法(结合矩阵法)

用下面的方法填写一个方形的表(方阵)：如果 $1\boldsymbol{R}2$，则在第一行第二列写 1；如果 $1\overline{\boldsymbol{R}}1$，则在第一行第一列写 0；一般地，如果 $i\boldsymbol{R}j$，则在第 i 行第 j 列写 1；如果 $i\overline{\boldsymbol{R}}j$，则在第 i

---

*) 我们故意把 $X\times X$ 的子集 G 和关系 $\boldsymbol{G}$ 用同一个记号表示，因为它们的实质是一样的。

行第 j 列写 0. 于是图 3-1 中的关系 $\boldsymbol{G}$ 用表

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

它称为表示关系 $\boldsymbol{R}$ 的结合矩阵，记成 A_R.

既然一个关系 $\boldsymbol{G}$ 就是 $X\times X$ 的一个子集，那末集合间的每一种运算就能自动地转换到关系之间的一种运算：若关系 $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ 分别为 $X\times X$ 的子集，那末

$x(\boldsymbol{F}\cup\boldsymbol{G})y$ 当且仅当 $(x, y)\in F\cup G$;

当且仅当 $(x, y)\in F$ 或 $(x, y)\in G$;

当且仅当 $x\boldsymbol{F}y$ 或 $x\boldsymbol{G}y$.

同理，

$x(\boldsymbol{F}\cap\boldsymbol{G})y$ 当且仅当 $x\boldsymbol{F}y$ 且 $x\boldsymbol{G}y$;

$x(\overline{\boldsymbol{F}})y$ 当且仅当 $x\overline{\boldsymbol{F}}y$;

$x(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{G})y$ 当且仅当 $x\boldsymbol{F}y$ 且 $x\overline{\boldsymbol{G}}y$.

空集合表示空关系，记为 $\emptyset$. 对于任何 x, $y\in X$, 都有 $x\emptyset y$; 全集 $X\times X$ 表示"满"关系，记为 $\boldsymbol{X}$, 对于一切 x、$y\in X$, 都有 $x\boldsymbol{X}y$; $(\overline{\boldsymbol{R}})$ 称为 $\boldsymbol{R}$ 的补关系.

定义 2 集合 X 内的一个关系 $\boldsymbol{R}$ 如果满足：

对任意的 $x\in X$, 均有 $x\boldsymbol{R}x$.

则称 $\boldsymbol{R}$ 为返身的关系.

例如实数轴上的关系 $\leqslant$、$\geqslant$、$=$ 等都是返身的关系.

如果补关系 $(\overline{\boldsymbol{R}})$ 是返身的，则称关系 $\boldsymbol{R}$ 为严格不返身的，这时候对一切 $x\in X$, 均有

$$x\overline{\boldsymbol{R}}x.$$

例如实数轴上的关系 $<$，$x=y+1$ 等都是严格不返身的关系.

定义 3 集合 X 内的一个关系 $\boldsymbol{R}$ 如果满足：

只要 $x\boldsymbol{R}y$，就有 $y\boldsymbol{R}x$.

则称 $\boldsymbol{R}$ 为对称的关系.

例如实数轴上的关系 $x^2+y^2\leqslant 1$ 就是对称的关系. "同年级"、"同班"等关系也是对称的关系.

定义 4 集合 X 内的一个关系 $\boldsymbol{R}$ 如果满足：

只要 $x\boldsymbol{R}y$ 和 $y\boldsymbol{R}z$，就有 $x\boldsymbol{R}z$.

则称 $\boldsymbol{R}$ 为传递的关系.

例如 X 为某校全体人员，X 内各人之间的亲戚关系（x 是 y 的亲戚）就是一个传递的关系. "同年级"、"同班"也都是传递的关系. 又如令 X 为集合 E 的全体子集，每一个子集作为 X 的一个元素，那末集合的 $\subset$ 关系就是一个传递的关系.

定义 5 集合 X 内的一个关系 $\boldsymbol{R}$ 如果满足：

只要有 $x\boldsymbol{R}y$ 和 $y\boldsymbol{R}x$ 就必须有 $x=y$.

则称 $\boldsymbol{R}$ 为反对称的关系.

例如实轴上的关系 $\leqslant$，就是一个反对称的关系；关系 $=$ 是返身的、对称的、传递的而且也是反对称的.

如果 X 是有限集 $\{1, 2, \cdots, n\}$，则以上性质都可以从图形或结合矩阵中看出来：

对表示关系 $\boldsymbol{R}$ 的一个图形而言；"每个点都有一个不经过其它点的圈"等价于 $\boldsymbol{R}$ 是返身的；"每个点都没有不经过其它点的圈"等价于 $\boldsymbol{R}$ 是严格不返身的；"任意两点间如果有线联着，那就必须在这线上出现双向的箭头 $\leftrightarrow$"等价于 $\boldsymbol{R}$ 是对

称的；不出现任何带有双向箭头的线等价于 $\boldsymbol{R}$ 是反对称的；"任意三点间如出现两条同方向的线那就必然在这三点中按箭头方向出现第三条同方向的线（从而在这三点中形成了一个按确定方向转——顺时针或者逆时针——的一个环）"等价于 $\boldsymbol{R}$ 是传递的.

对表示一个关系 $\boldsymbol{R}$ 的结合矩阵

$$A_R=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

（其中 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列的数，$a_{ij}=0$ 或 1）而言：对角线（元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 的全体叫对角线）上都是 1［即 $a_{ii}=1(i=1,2,\cdots,n)$］等价于 $\boldsymbol{R}$ 是返身的；如果结合矩阵 A_R 满足：当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=a_{ji}$，则称 A_R 是对称的结合矩阵，结合矩阵 A_R 的对称性等价于关系 $\boldsymbol{R}$ 是对称的．例如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 就是一个对称矩阵，它同时也代表了三个元素之间的一种对称关系；"结合矩阵对角线上的元素都是 0"等价于 $\boldsymbol{R}$ 是严格不返身的；"结合矩阵满足：对 $i\neq j$ 有 $a_{ij}a_{ji}=0$"等价于关系 $\boldsymbol{R}$ 是反对称的（因为当且仅当此时 a_{ij} 与 a_{ji} 不能同时为 1，即对不同的 x 与 y 不能既有 $x\boldsymbol{R}y$ 又有 $y\boldsymbol{R}x$）；"结合矩阵满足：若 $a_{ij}=a_{jk}=1$，则必有 $a_{ik}=1$"等价于 $\boldsymbol{R}$ 是传递的.

定义 6　集合 X 内的一个关系 $\boldsymbol{R}$ 如果是返身的、对称的且传递的，则称 $\boldsymbol{R}$ 为一个等价关系.

【例 2】　实数轴上的关系"＝"是等价关系；

若 X 为平面上的全体三角形，那末两个三角形的相似关

系是一个等价关系，两个三角形全等也是一个等价关系；

若 X 是平面上的全体多边形，那末两个多边形面积相等是一个等价关系；

若 X 为平面上的全体直线，则两条直线的平行关系是一个等价关系，但是两条直线的垂直关系却不是等价关系，因为垂直关系既不返身又不传递；

若 X 是某中学的全体学生，那末同班关系，同年级关系都是等价关系，但"x 比 y 年级高"却不是等价关系，因为它既不返身又不对称；

若 X 为全体谓词公式，那末两个谓词公式的逻辑等价关系是一个等价关系.

由例 2 中的这些例子可以看到：在一个等价关系 $\boldsymbol{R}$ 下，x 与 y 等价就相当于在某种含义下"相等"，比如说数的相等，三角形的相似、全等，多边形的面积相等，直线的平行，学生的同班、同年级，谓词公式的逻辑等价，…等等. 按这些关系可以把相同性质的元素——即具有这种等价性质的两个元素——分在一个类里，这样，就可以把 X 分成许多互不相交的类，这就是下面的定义 7 与定理 1.

定义 7 若 $\boldsymbol{R}$ 是集合 X 内的一个等价关系，则任给 $x\in X$，子集

$$\{y \mid y\in X,\ \text{且}\ x\boldsymbol{R}y\}$$

称为包含 x 的 $\boldsymbol{R}$ 等价类，记成 $[x]_R$.

定理 1 若 $\boldsymbol{R}$ 是集合 X 内的一个等价关系，那末存在 X 的一个非空子集类，满足：

1) 每个子集都是一个 $\boldsymbol{R}$ 等价类，在这个等价类中的任意两个元素 x，y 都 $\boldsymbol{R}$ 等价，意即 $x\boldsymbol{R}y$；

2) 对任意一个元素 x，必存在一个上述的子集包含 x；

3）任意两个上述的子集彼此不相交.

【证】 由于 $\boldsymbol{R}$ 是返身的，即 $x\boldsymbol{R}x$，所以 $x\in[x]_R$，也即 $[x]_R\neq\emptyset$.

其次，我们证明：对 $x\neq y$，或者有 $[x]_R=[y]_R$，或者有 $[x]_R\cap[y]_R=\emptyset$. 这是因为有两种情况：第一种情况：如果 $x\boldsymbol{R}y$，由 $\boldsymbol{R}$ 是对称的，所以 $y\boldsymbol{R}x$；对于任意的 $z\in[x]_R$，按定义 $x\boldsymbol{R}z$，但由 $\boldsymbol{R}$ 是传递的，所以 $y\boldsymbol{R}z$. 按 $\boldsymbol{R}$ 等价类的定义，这说明 $z\in[y]_R$，由 z 在 $[x]_R$ 中的任意性就得到

$$[x]_R\subset[y]_R.$$

同理可证 $$[y]_R\subset[x]_R.$$

因此 $$[x]_R=[y]_R.$$

第二种情况：如果 $x\bar{\boldsymbol{R}}y$，则 $[x]_R\cap[y]_R$ 必为 $\emptyset$. 这可以用反证法证明：如果 $[x]_R\cap[y]_R$ 非空，那末它至少包含一个元素，例如说 z. 于是由 $z\in[x]_R$ 知道 $x\boldsymbol{R}z$；又由 $z\in[y]_R$ 知道 $y\boldsymbol{R}z$. 另由 $\boldsymbol{R}$ 是对称的知 $z\boldsymbol{R}y$，再由 $\boldsymbol{R}$ 是传递的得到 $x\boldsymbol{R}y$. 但这与开始的条件 $x\bar{\boldsymbol{R}}y$ 相矛盾. 因此只能得到结论

$$[x]_R\cap[y]_R=\emptyset.$$

最后，我们把所有重合的 $\boldsymbol{R}$ 等价类看成同一个，这样就得到一些两两不相交的 $\boldsymbol{R}$ 等价类，它们就是定理中所要求的一些子集，即 X 的满足 1）、2）、3）的子集类. ▌

定义 8 若 $\boldsymbol{R}$ 是集合 X 内的一个等价关系，把 $\boldsymbol{R}$ 等价类 $[x]_R$ 看成元素（若 $[y]_R=[x]_R$，则认为 $[y]_R$ 与 $[x]_R$ 是相同的），于是称由这些元素所构成的集合为 X 关于 $\boldsymbol{R}$ 的商集，记为 $X/\boldsymbol{R}$. 即

$$X/\boldsymbol{R}=\{[x]_R\,|\,x\in X\}.$$

【例 3】 若 $X=\{$全体正整数$\}$，关系

$$\boldsymbol{R}=\{(x,\ y)\,|\,x-y\text{ 能被 3 整除},\ x,\ y\in X\},$$

那末 $\boldsymbol{R}$ 等价类有

$$[1]_R=\{1,\ 4,\ 7,\ \cdots\},$$
$$[2]_R=\{2,\ 5,\ 8,\ \cdots\},$$
$$[3]_R=\{3,\ 6,\ 9,\ \cdots\},$$
$$[4]_R=[1]_R,\ \cdots.$$

因此,商集 $X/\boldsymbol{R}$ 只有三个元素 $[1]_R$、$[2]_R$、$[3]_R$,即

$$X/\boldsymbol{R}=\{[1]_R,\ [2]_R,\ [3]_R\}.$$

1.2 集合 $\boldsymbol{X}$ 到 $\boldsymbol{Y}$ 的关系

对于两个集合 X、Y,类似地我们也可以考虑 X 到 Y 的某个关系.

首先可以类似地定义 X 与 Y 的笛卡儿乘积

$$X\times Y=\{(x,\ y)\,|\,x\in X,\ y\in Y\}.$$

一般地说,

$$X\times Y\neq Y\times X.$$

在 X、Y 均为有限集时,我们在第一章中已明确地指出了这一点.

【例1】 设 X 为空间中的全体直线,每条直线为 X 的一个元素,Y 为空间中的全体平面,每个平面为 Y 的一个元素. 我们就可以考虑 X 中的某直线是否与 Y 中的某平面相垂直的关系. 又若 X 与 Y 分别是某两个学校在校学生的全体,我们可以考虑甲校学生是否认识乙校学生的"认识关系"等等.

我们抽象地给出下述概念:

定义1 笛卡儿积 $X\times Y$ 的一个子集 R 称为 X 到 Y 的一个关系;如果对 $x\in X$, $y\in Y$, 有 $(x,\ y)\in R$, 就称 x, y 有关系 $\boldsymbol{R}$, 记成 $x\boldsymbol{R}y$; 否则就称 x, y 不满足关系 $\boldsymbol{R}$, 记成

$x\bar{R}y$.

在 X 和 Y 均为有限集时，X 到 Y 的一个关系 R 也可以有两种直观的表达法：

1) 表示关系 R 的图形法

把 X 中的每个元素画成一个点，依次从上到下排在左方；把 Y 中的每个元素画成一个点，依次从上到下排在右方。如果 xRy，则从点 x 到点 y 联一条直线，这样就得到 R 的图形表示。例如 $X=\{2, 4, 8\}$, $Y=\{3, 5, 7, 9\}$，则图 3-2 表示了一个 X 到 Y 的关系"$x+y=$质数"。

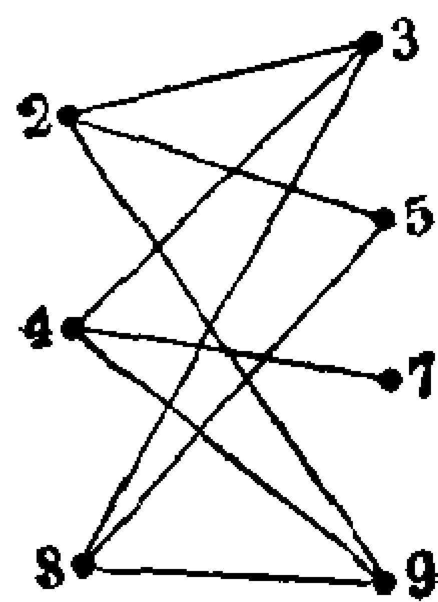


图 3-2

2) 表示关系 R 的结合矩阵法

设 $X=\{x_1, \cdots, x_n\}$, $Y=\{y_1, \cdots, y_m\}$. 画一个 n 行 m 列的表，在第 i 行第 j 列上记以数 a_{ij}，如果 x_iRy_j，则取 $a_{ij}=1$；如果 $x_i\bar{R}y_j$，则取 $a_{ij}=0$. 这个表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

叫做表示关系 R 的结合矩阵，记成 A_R，它有 n 行 m 列。

例如图 3-2 中的关系 R 的结合矩阵为

$$A_R=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

如果 X 到 Y 有两个关系 R 和 S，那末我们也可定义关系 $R\cup S$, $R\cap S$, $(\bar{R})$ 与 $R-S$.

当 X 与 Y 都是有限集时，我们在下面讨论由这些运算

所得到的关系的图形与结合矩阵如何通过 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的图形与结合矩阵表达出来.

1) 图形　取 X, Y 的元素为点，分别排在左右两边，在 X 和 Y 间画上 $\boldsymbol{R}$ 的图形和 $\boldsymbol{S}$ 的图形. 把 $\boldsymbol{R}$ 图形与 $\boldsymbol{S}$ 图形重合的线看成同一条，就得到 $\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S}$ 的图形；把 $\boldsymbol{R}$ 图形与 $\boldsymbol{S}$ 图形的公共线留下，其它线都去掉，则得到 $\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{S}$ 的图形；在 $\boldsymbol{R}$ 图形的线中，把重合于 $\boldsymbol{S}$ 图形中线的那些线都去掉，留下的就是 $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{S}$ 的图形；把 $\boldsymbol{R}$ 图形中原来有联线的都去掉，在没有联线的 x、$y(x\in X,\ y\in Y)$ 两点加上新的联线，就得到 $(\bar{\boldsymbol{R}})$ 的图形.

2) 结合矩阵　设

$$A_R=(a_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix}\begin{matrix}a_{ij}=0\text{ 或 }1\\ (1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m);\end{matrix}$$

$$A_S=(b_{ij})=\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nm}\end{pmatrix}\begin{matrix}b_{ij}=0\text{ 或 }1\\ (1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m).\end{matrix}$$

那末，当且只当 a_{ij}、b_{ij} 中有一个为1时，$\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S}$ 的结合矩阵 $A_{R\cup S}$ 在第 i 行第 j 列的元素才是1，也就是说，$A_{R\cup S}$ 在第 i 行第 j 列的元素应为 a_{ij} 与 b_{ij} 中的较大者，记成 $\max(a_{ij},\ b_{ij})$ 或 $a_{ij}\vee b_{ij}$.

于是得 $\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S}$ 的结合矩阵

$$A_{R\cup S}=(a_{ij}\vee b_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11}\vee b_{11} & \cdots & a_{1m}\vee b_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1}\vee b_{n1} & \cdots & a_{nm}\vee b_{nm}\end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

如果我们定义矩阵的运算:

$$A_R\vee A_S=(a_{ij}\vee b_{ij}), \tag{1.2}$$

那末

$$A_{R\cup S}=A_R\vee A_S. \tag{1.3}$$

同理，当且仅当 a_{ij} 与 b_{ij} 均为 1 时，$\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{S}$ 的结合矩阵 $A_{R\cap S}$ 在第 i 行第 j 列的元素才是 1，也就是说 $A_{R\cap S}$ 在第 i 行第 j 列的元素应为 a_{ij} 与 b_{ij} 中较小的一个，记成 $\min(a_{ij}, b_{ij})$ 或 $a_{ij}\wedge b_{ij}$. 于是得

$$A_{R\cap S}=(a_{ij}\wedge b_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11}\wedge b_{11} & \cdots & a_{1m}\wedge b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\wedge b_{n1} & \cdots & a_{nm}\wedge b_{nm} \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

如果我们定义矩阵的运算

$$A_R\wedge A_S=(a_{ij}\wedge b_{ij}), \tag{1.5}$$

那末

$$A_{R\cap S}=A_R\wedge A_S. \tag{1.6}$$

结合矩阵 $A_{\overline{R}}$ 的元素取 0 还是取 1 恰好与结合矩阵 A_R 在同样位置的元素相反，因此

$$A_{\overline{R}}=(1-a_{ij})=\begin{pmatrix} 1-a_{11} & \cdots & 1-a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ 1-a_{n1} & \cdots & 1-a_{nm} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

如果我们定义结合矩阵的运算

$$\sim A_R=\mathbf{1}-A_R, \tag{1.8}$$

其中

$$\mathbf{1}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

是所有元素都是 1 的结合矩阵，而两个矩阵的减法是指把相同位置的元素分别相减后得到的新矩阵 [例如 $(a_{ij})-(b_{ij})=(a_{ij}-b_{ij})$]，那末

$$A_{\overline{R}}=\sim A_R. \tag{1.10}$$

最后，我们求两个“关系的相减” $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{S}$ 的结合矩阵. 按结合矩阵的定义，当且只当 $a_{ij}=1$ 且 $b_{ij}=0$ 时，A_{R-S} 在第 i

行第 j 列的元素才为 1. 所以 A_{R-S} 在第 i 行第 j 列的元素应为 a_{ij} 减去 a_{ij} 与 b_{ij} 中的较小者，即

$$A_{R-S}=(a_{ij}-a_{ij}\wedge b_{ij}). \tag{1.11}$$

用结合矩阵的运算写出，就是

$$A_{R-S}=A_R-A_R\wedge A_S. \tag{1.12}$$

定义 2 若 X 到 Y 有一个关系 $\boldsymbol{R}$, Y 到 Z 有一个关系 $\boldsymbol{S}$, 那末由 $X\times Z$ 上的如下集合

$$\{(x, z)\,|\,x\in X,\ z\in Z,\ 且存在一个\ y\in Y,\ 使\ x\boldsymbol{R}y,\ y\boldsymbol{S}z\}$$

确定了一个 X 到 Z 的关系，称为 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的复合关系，记成 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}$.

于是 $x(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})z$ 当且仅当 $\exists y\in Y$ 使 $x\boldsymbol{R}y$, $y\boldsymbol{S}z$.

定理 2 若 X 到 Y, Y 到 Z, Z 到 W 分别有关系 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{T}$, 那末 $(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})\circ\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{R}\circ(\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{T})$ 是 X 到 W 的关系，而且有

$$(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})\circ\boldsymbol{T}=\boldsymbol{R}\circ(\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{T}).$$

【证】 由定义 2, 我们知道 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}$ 是 X 到 Z 的一个关系，$\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{T}$ 是 Y 到 W 的一个关系. 于是由 $\boldsymbol{T}$ 是 Z 到 W 的一个关系及定义 2 知道: $(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})\circ\boldsymbol{T}$ 是 X 到 W 的一个关系. 同理，由 $\boldsymbol{R}$ 是 X 到 Y 的一个关系及定义 2 知道 $\boldsymbol{R}\circ(\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{T})$ 也是 X 到 W 的一个关系，因此它们都是 $X\times Z$ 中的一个子集. 要证明这两个关系是一样的，只须说明它们是 $X\times Z$ 中的同一个子集就够了. 按定义 2:

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})\circ\boldsymbol{T}=\{(x, w)\,|\,x\in X,\ w\in W,\ \exists z\in Z\\ &x\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}z,\ z\boldsymbol{T}w\}=\{(x, w)\,|\,x\in X,\ w\in W,\\ &\exists z\in Z,\ 使\ \exists y,\ x\boldsymbol{R}y,\ y\boldsymbol{S}z,\ z\boldsymbol{T}w\}=\{(x, w)\\ &|\,x\in X,\ w\in W,\ \exists y\in Y,\ \exists z\in Z,\ 使\ x\boldsymbol{R}y,\\ &y\boldsymbol{S}z,\ z\boldsymbol{T}w\}.\end{aligned}$$

同理

$$\boldsymbol{R}\circ(\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{T})=\{(x,\ w)\,|\,x\in X,\ w\in W,\ \exists y\in Y$$
$$x\boldsymbol{R}y,\ y\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{T}w\}=\{(x,\ w)\,|\,x\in X,\ w\in W,\ \exists y\in Y$$
$$x\boldsymbol{R}y,\ \text{且}\ \exists z\ \text{使}\ y\boldsymbol{S}z,\ z\boldsymbol{T}w\}=\{(x,\ w)\,|\,x\in X,$$
$$w\in W,\ \exists y\in Y,\ \exists z\in Z,\ \text{使}\ x\boldsymbol{R}y,\ y\boldsymbol{S}z,\ z\boldsymbol{T}w\},$$

所以

$$(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})\circ\boldsymbol{T}=\boldsymbol{R}\circ(\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{T}).\ \blacksquare$$

定义 3 设 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{T}$ 分别是 X 到 Y, Y 到 Z, Z 到 W 的关系，定义

$$\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})\circ\boldsymbol{T}(=\boldsymbol{R}\circ(\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{T})).$$

如果 $X=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$, $Y=\{y_1,\ \cdots,\ y_m\}$, $Z=\{z_1,\ \cdots,\ z_l\}$ 均是有限集；$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{S}$ 分别为 X 到 Y 和 Y 到 Z 的一个关系，下面讨论 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}$ 的图形与结合矩阵：

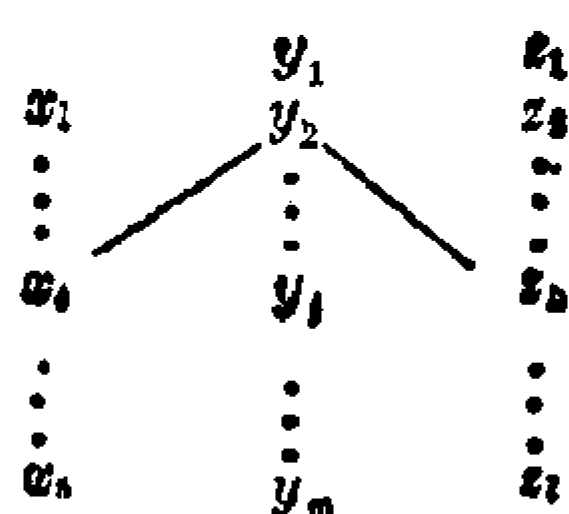


图 3-3

1) $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}$ 的图形

把 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的图形并排画在一起(如图 3-3)．对任意 $x_i\in X$, $z_k\in Z$, 只要 x_i 与 z_k 之间有通过 Y 中的某个点的折线，就把 x_i 与 z_k 联起来，否则，就不联，这样就从 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的图形得到 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}$ 的图形.

2) $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}$ 的结合矩阵

首先简要地提一下两个矩阵相乘的定义：设有 $n\times m$ (即 n 行 m 列)的矩阵

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix} 1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m \end{pmatrix}$$

及 $m\times l$(即 m 行 l 列)的矩阵

$$B=(b_{jk})=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{ml} \end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix} 1\leqslant j\leqslant m \\ 1\leqslant k\leqslant l \end{pmatrix}$$

其中 a_{ij}, b_{jk} 是任意实数。

我们定义

$$AB=(c_{ik})=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nl} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant k\leqslant l \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

其中

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}, \quad (1.14)$$

也就是：把 A 的第 i 行的元素与 B 的第 k 列相应的元素（a_{ij} 与 b_{jk}）相乘后再加起来，就得到 c_{ik}. *)

这里需要注意的是：A 的列数必须与 B 的行数相等（即均为 m）时，才能作乘法 AB. 所以一般未必能同时定义 AB 及 BA. 设 AB 是 $n\times l$（即 n 行 l 列）矩阵，如果 $n=l$, 那末 AB 是 $n\times n$ 矩阵（或称 n 阶矩阵，或称 n 阶方阵），这时候 B 是 $m\times n$ 矩阵，而 A 是 $n\times m$ 矩阵，B 的列数 n 恰等于 A 的行数 n, 于是 BA 就也有意义，但这时候 BA 是 $m\times m$ 矩阵（即 m 阶矩阵），所以还谈不上讨论 BA 是否等于 AB 的问题. 如果进一步假定 A, B 都是 n 阶矩阵（即 $n=m=l$），那末 AB, BA 均有意义，而且都是 n 阶矩阵，它们是否相等呢[即它们在同一位置（例如在任意的第 i 行第 j 列上）的元素（或称分量）是否完全一样]？

两个矩阵如果有相同的行数及相同的列数，如果它们在同一位置上（例如在任意的第 i 行第 j 列上）的元素完全一样，则称这两个矩阵相等，用“=”表示.

n 阶矩阵 A 和 B 一般说来

$$AB\neq BA.$$

只有极少数特殊形式的 A 和 B 才可能得到 $AB=BA$.

---

*) 关于矩阵乘法的详细讨论，可参阅本丛书中的《高等代数》.

对于两个行数一样、列数也是一样的矩阵，还可以定义加减法及运算 $\vee$, $\wedge$. 例如若 A、B 都是 $n\times m$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}.$$

则定义

$$A\pm B=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & \cdots & a_{1m}\pm b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\pm b_{n1} & \cdots & a_{nm}\pm b_{nm} \end{pmatrix},$$

$$A\wedge B=\begin{pmatrix} a_{11}\wedge b_{11} & \cdots & a_{1m}\wedge b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\wedge b_{n1} & \cdots & a_{nm}\wedge b_{nm} \end{pmatrix},$$

$$A\vee B=\begin{pmatrix} a_{11}\vee b_{11} & \cdots & a_{1m}\vee b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\vee b_{n1} & \cdots & a_{nm}\vee b_{nm} \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

有了矩阵加减法和乘法的定义后，我们可以证明

命题 1 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}$ 的结合矩阵

$$A_{R\circ S}=\mathbf{1}-[(\mathbf{1}-A_RA_S)\vee\mathbf{0}]. \tag{1.16}$$

(其中 $\mathbf{1}$ 为 $n\times l$ 矩阵，它的元素均为 1; $\mathbf{0}$ 为 $n\times l$ 矩阵，它的元素均为 0.)

【证】 设 $A_R=(a_{ij})$, $A_S=(b_{jk})$ $(1\leqslant i\leqslant n;\ 1\leqslant j\leqslant m;\ 1\leqslant k\leqslant l)$.

$$A_{R\circ S}=\begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nl} \end{pmatrix}, \quad A_RA_S=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nl} \end{pmatrix}$$

那末按 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}$ 的定义，当且只当存在一个 $j(1\leqslant j\leqslant m)$ 使 $a_{ij}=b_{jk}=1$ 时，有 $d_{ik}=1$; 另一方面，当且仅当存在一个 $j(1\leqslant j\leqslant m)$ 使 $a_{ij}=b_{jk}=1$ 时，有 $c_{ik}\geqslant 1$, 即 $1-c_{ik}\leqslant 0$, 因而 $(1-c_{ik})\vee 0=0$, 从而 $1-((1-c_{ik})\vee 0)=1$. 这说明

$$1-[(1-A_R A_S)\vee 0]=(d_{ik})=A_{R\circ S}.$$ ▌

$R\circ S$ 的结合矩阵 $A_{R\circ S}$ 还有另一种表示方法，我们先定义两个矩阵 $A(n\times m)$ 及 $B(m\times l)$ 的一种运算"$\circ$"：

若 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{ml} \end{pmatrix}$.

则定义

$$A\circ B=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nl} \end{pmatrix} \quad (n\times l). \tag{1.17}$$

其中

$$c_{ik}=\bigvee_{j=1}^{m}(a_{ij}\wedge b_{jk})=(a_{i1}\wedge b_{1k})\vee\cdots\vee(a_{im}\wedge b_{mk}). \tag{1.18}$$

注意 矩阵运算 $A\circ B$ 与 AB 有一点相象：若

$$AB=\begin{pmatrix} c'_{11} & \cdots & c'_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ c'_{n1} & \cdots & c'_{nl} \end{pmatrix},$$

那末由 AB 的定义，有

$$c'_{ik}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk}.$$

对比一下 c_{ik} 与 c'_{ik}，就能发现把 c'_{ik} 中的乘与 Σ 分别用 $\wedge$（逻辑乘，即取较小者）与 $\vee$（逻辑加，即取较大者）代换后，就得到 c_{ik}.

$A_{R\circ S}$ 的第二种表达公式则为

命题 2

$$A_{R\circ S}=A_R\circ A_S. \tag{1.19}$$

【证】 按 $R\circ S$ 的定义，$A_{R\circ S}$ 在第 i 行第 k 列的元素当且仅当存在一个 $j(1\leqslant j\leqslant m)$ 使 $a_{ij}=b_{jk}=1$ 时，才等于 1，因此它恰是

$$\bigvee_{j=1}^{m}(a_{ij}\wedge b_{jk}).\ \rrbracket$$

当 $X=Y$ 时，X 到 Y 的一个关系就是 X 内的一个关系。

设 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{S}$ 都是 X 内的关系，这时 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R}$ 均有意义，但一般说来

$$\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}\neq\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R}.$$

例如：　$\boldsymbol{X}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，

$\boldsymbol{R}=\{(2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (4,\ 3)\}$，

$\boldsymbol{S}=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 4),\ (4,\ 4)\}$.

那末　$\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}=\{(2,\ 2)\}$；

$\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R}=\{(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (4,\ 3)\}$.

所以

$$\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}\neq\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R}.$$

这个例子同时也说明：如果 A、B 都是 n 阶矩阵，那末一般说来

$$A\circ B\neq B\circ A.$$

另一方面，如果 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{T}$ 分别是 X 到 Y，Y 到 Z，Z 到 W 的关系，且 X、Y、Z、W 均为有限集，那末由定理 2 就知道：结合矩阵对运算"∘"满足"结合律"：

$$(A_R\circ A_S)\circ A_T=A_R\circ(A_S\circ A_T). \tag{1.20}$$

因此可写成 $A_R\circ A_S\circ A_T$.

定义 4　若 $\boldsymbol{R}$ 为 X 内的一个关系，我们定义 X 内的关系 $\boldsymbol{R}^2$, …, $\boldsymbol{R}^m$, …, $\boldsymbol{R}^+$ 分别为：

$$\boldsymbol{R}^2=\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R},\ \cdots,\ \boldsymbol{R}^m=\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}^{m-1},\ \cdots$$

$$\boldsymbol{R}^+=\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{R}^2\cup\boldsymbol{R}^3\cup\cdots$$

(即 $(x,\ y)\in\boldsymbol{R}^+$ 当且仅当存在 $m\geqslant 1$，使 $(x,\ y)\in\boldsymbol{R}^m$)。

关系 $\boldsymbol{R}^+$ 称为关系 $\boldsymbol{R}$ 在 X 内的传递闭包。

由定理 2，我们有 $\boldsymbol{R}^n\circ\boldsymbol{R}^m=\boldsymbol{R}^{n+m}$.

定义5 若 $\boldsymbol{R}$ 为 X 到 Y 的一个关系，则 Y 到 X 的下述关系($Y\times X$ 的子集)

$$\{(y,\ x)\,|\,y\in Y,\ x\in X,\ x\boldsymbol{R}y\}$$

称为 $\boldsymbol{R}$ 的逆关系，记为 $\boldsymbol{R}^{-1}$. 也就是说

$$y\boldsymbol{R}^{-1}x \text{ 当且仅当 } x\boldsymbol{R}y.$$

须注意: $\boldsymbol{R}$ 是 X 到 Y 的关系，而 $\boldsymbol{R}^{-1}$ 是 Y 到 X 的关系.

显然，

$$(\boldsymbol{R}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{R}. \tag{1.21}$$

这是因为 $(\boldsymbol{R}^{-1})^{-1}$ 也是 X 到 Y 的关系，且对于任意的 $x\in X$, $y\in Y$, 有

$$x(\boldsymbol{R}^{-1})^{-1}y \Leftrightarrow y\boldsymbol{R}^{-1}x \Leftrightarrow x\boldsymbol{R}y.$$

所以 $(\boldsymbol{R}^{-1})^{-1}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 是一样的.

在 X、Y 均为有限集时，逆关系 $\boldsymbol{R}^{-1}$ 的图形得自把 $\boldsymbol{R}$ 的图形中 Y 的点的位置和 X 的点的位置相对换，例如图 3-4.

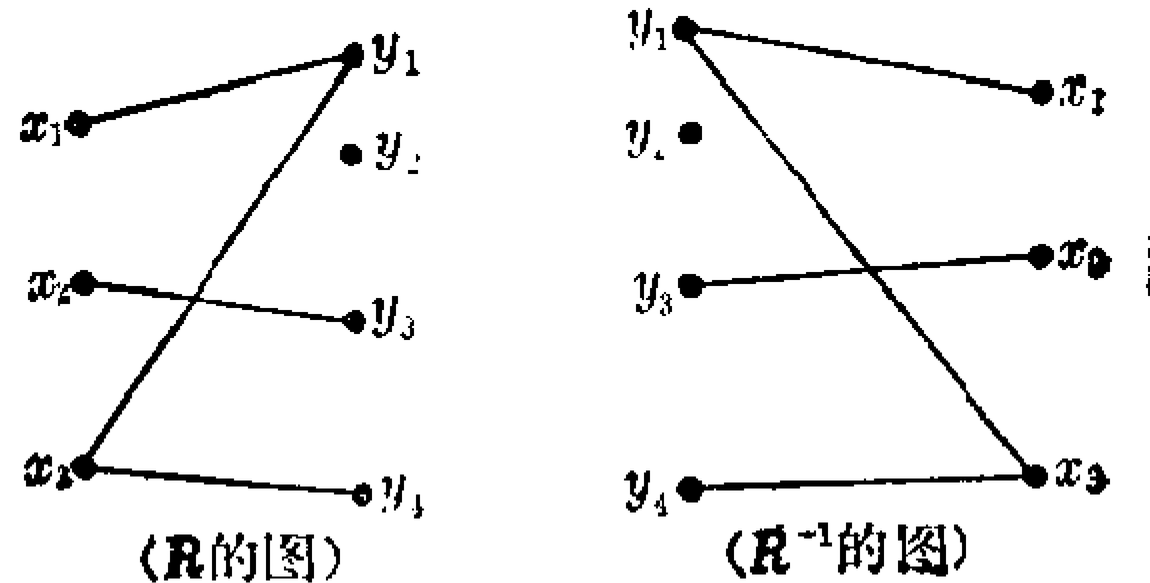


图 3-4

逆关系 $\boldsymbol{R}^{-1}$ 的结合矩阵 $A_{\boldsymbol{R}^{-1}}$: 在图 3-4 中，$\boldsymbol{R}$ 的结合矩阵为

$$A_R=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix},$$

而 $\boldsymbol{R}^{-1}$ 的结合矩阵为

$$A_{R^{-1}}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

我们可以看到把 A_R 的行变成列，列变成行后就得到 $A_{R^{-1}}$. 一般情形也是这样.

从把一个 $n\times m$ 矩阵 A 的行变成列，列变成行所得到的 m 行 n 列矩阵叫做 A 的**转置矩阵**，记为 A^T.

所以 $\boldsymbol{R}^{-1}$ 的结合矩阵

$$A_{\boldsymbol{R}^{-1}}=(A_R)^T. \tag{1.22}$$

定理 3 若 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{S}$ 分别是由 X 到 Y 和 Y 到 Z 的关系，那末

$$(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})^{-1}=\boldsymbol{S}^{-1}\circ\boldsymbol{R}^{-1}.$$

【证】 对任意的 $x\in X$, $z\in Z$ 而言，由定义

$$\begin{aligned}z(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})^{-1}x&\Leftrightarrow x(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})z\\&\Leftrightarrow\exists\, y,\ x\boldsymbol{R}y,\ y\boldsymbol{S}z\\&\Leftrightarrow\exists\, y,\ y\boldsymbol{R}^{-1}x,\ z\boldsymbol{S}^{-1}y\\&\Leftrightarrow z(\boldsymbol{S}^{-1}\circ\boldsymbol{R}^{-1})x.\end{aligned}$$

由 x, z 的任意性可知：$(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})^{-1}=\boldsymbol{S}^{-1}\circ\boldsymbol{R}^{-1}$. 】

推论 若定理 3 中的 X、Y、Z 都是有限集，那末

$$A^T_{R\circ S}=A^T_S\circ A^T_R.$$

【证】 由定理 2 及复合关系的结合矩阵表达式，有

$$A^T_{R\circ S}=A_{(R\circ S)^{-1}}=A_{S^{-1}\circ R^{-1}}=A_{S^{-1}}\circ A_{R^{-1}}=A^T_S\circ A^T_R.$$ 】

定义 6 设 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{S}$ 均为 X 到 Y 的关系，如果它们作为 $X\times Y$ 的子集，有

$$\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{S},$$

则称**关系 $\boldsymbol{R}$ 蕴涵关系 $\boldsymbol{S}$**，意即：对于 $x\in X$, $y\in Y$, 只要 x、y 有 $\boldsymbol{R}$ 关系，则它们一定有 $\boldsymbol{S}$ 关系[也就是：

$$若\ x\boldsymbol{R}y,\ 则\ x\boldsymbol{S}y\,(\forall(x,\ y)\in X\times Y)].$$

作一个直观的比喻，例如：$\boldsymbol{R}$ 是"同班"关系，$\boldsymbol{S}$ 是"同年级"关系.

显然，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{S}$ 等价于 $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{S}$ 且 $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}$. 此外，还有

$$\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{S}\Leftrightarrow\boldsymbol{S}^{-1}\subset\boldsymbol{R}^{-1}; \tag{1.23}$$

$$(\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S})^{-1}=\boldsymbol{R}^{-1}\cup\boldsymbol{S}^{-1}; \tag{1.24}$$

$$(\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{S})^{-1}=\boldsymbol{R}^{-1}\cap\boldsymbol{S}^{-1}; \tag{1.25}$$

$$(\bar{\boldsymbol{R}})^{-1}=\overline{(\boldsymbol{R}^{-1})}; \tag{1.26}$$

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{S})^{-1}=\boldsymbol{R}^{-1}-\boldsymbol{S}^{-1}. \tag{1.27}$$

这些等式的证明留给读者作为习题.

定理 4 如果 $\boldsymbol{R}$ 是集 X 内的一个关系，那末 $\boldsymbol{R}^+$ 是包含 $\boldsymbol{R}$ 的最小传递关系，即

(1) $\boldsymbol{R}^+$ 是传递的，

(2) 对任意一个满足 $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{S}$ 的传递关系 $\boldsymbol{S}$, 均有

$$\boldsymbol{R}^+\subset\boldsymbol{S}.$$

【证】 (1) 如果 x、y、$z\in\boldsymbol{R}^+$, 满足 $x\boldsymbol{R}^+y$, $y\boldsymbol{R}^+z$, 那末由 $\boldsymbol{R}^+$ 的定义，$x\boldsymbol{R}^+y$ 等价于存在一个 m, 使 $x\boldsymbol{R}^my$, $y\boldsymbol{R}^+z$ 等价于存在一个 n, 使 $y\boldsymbol{R}^nz$, 因此 $x(\boldsymbol{R}^m\circ\boldsymbol{R}^n)z$, 即 $x\boldsymbol{R}^{n+m}z$. 但是 $\boldsymbol{R}^{n+m}\subset\boldsymbol{R}^+$, 于是 $x\boldsymbol{R}^+z$. 这就是说，$\boldsymbol{R}^+$ 是传递的.

(2)的证明：对任意的 x、$y\in X$, 如果 $x\boldsymbol{R}^+y$, 也就是：存在某个 n, 使 $x\boldsymbol{R}^ny$, 那末按 $\boldsymbol{R}^n$ 的定义可知：存在 x_1, $\cdots$, $x_{n-1}\in X$, 使

$$x\boldsymbol{R}x_1,\ x_1\boldsymbol{R}x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}\boldsymbol{R}y.$$

但是由 $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{S}$ 立刻可知

$$x\boldsymbol{S}x_1,\ x_1\boldsymbol{S}x_2,\ x_2\boldsymbol{S}x_3,\ \cdots,\ x_{n-1}\boldsymbol{S}y.$$

再由 $\boldsymbol{S}$ 是传递的，就能得到

$$x\boldsymbol{S}y.$$

综合起来，我们得到：由 $x\boldsymbol{R}^+y$ 就能推出 $x\boldsymbol{S}y$. 这说明了

$$\boldsymbol{R}^+\subset\boldsymbol{S}.$$ 】

定义 7 X 内的一个返身、反对称、传递的关系 $\boldsymbol{R}$, 称为

半序关系，简称半序．有时为明确起见，把 R 记成"$\leqslant$"．

给定了某个半序"$\leqslant$"后的 X，称为半序集，半序集记为 $(X,\ \leqslant)$．

（注意任给 $x,\ y\in X$，未必一定有 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$．）

如果半序集 $(X,\ \leqslant)$ 满足："对任意的 $x,\ y\in X$，要么有 $x\leqslant y$，要么有 $y\leqslant x$"，则称"$\leqslant$"为全序，$(X,\ \leqslant)$ 为全序集．

【例 2】 设 A 为任意一个集合．令 X 为 A 的全体子集组成的新集合，A 的每个子集都是 X 的一个元素，则子集间的包含关系"$\subset$"就导出了 X 内的一个半序关系．

【例 3】 若 X 是大于 1 的全体自然数，如果 n 能整除 m，则定义 $n\leqslant m$，这样"$\leqslant$"就使 X 成为半序集 $(X,\ \leqslant)$．

【例 4】 一个常见的例子——字典序．设 R 是全体实数，$X=R\times R$，在 X 内定义字典序 D：对 $(x_1,\ y_1)\in R\times R$ 及 $(x_2,\ y_2)\in R\times R$，定义 $(x_1,\ y_1)D(x_2,\ y_2)$ 当且仅当 $x_1<x_2$ 成立或者虽然 $x_1=x_2$，但是 $y_1\leqslant y_2$ 成立．

字典序 D 是 $R\times R$ 上的一个全序．应用字典序的想法就可以对全体复数给一个全序．

这种字典序可以推广至 $X=R\times R\times R$（记成 R^3），直至一般 $X=R^n$ 情形．

有限半序集 X 可以有一种比它作为一个关系而得到的图形更直观的表达方式：

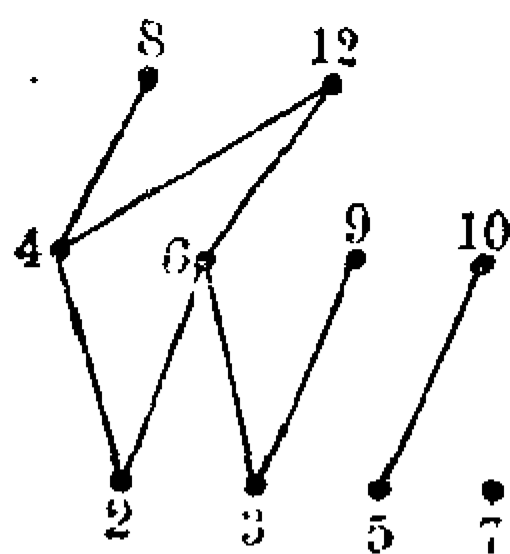


图 3-5

把 X 中的元素记成点，如果 $x\leqslant y$，则把点 y 画在上面，而把点 x 画在下面，按这样的方法，把 X 的所有元素画在平面上，有"$\leqslant$"关系的两个点用线联上，这样得到的图称为半序集 $(X,\ \leqslant)$ 的海色图．

【例 5】 $X=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\}$，$x\leqslant y$ 表

示 x 能整除 y, 那末$(X, \leqslant)$的海色图如图 3-5.

归纳本节要点

X 到 Y 的一个关系 $\boldsymbol{R}$ 就是 $X\times Y$ 的一个子集，因此集合间的一些运算和运算规律就自动地转化到关系间的运算和运算规律.

除了这些运算外，还有复合关系、逆关系.

当所涉及的集合均为有限集时，关系 $\boldsymbol{R}$ 可用图形或结合矩阵 A_R 表示. 结合矩阵与运算之间的关系为

$$A_{R\cup S}=A_R\vee A_S;$$
$$A_{R\cap S}=A_R\wedge A_S;$$
$$A_{\bar{R}}=\sim A_R=\mathbf{1}-A_R;$$
$$A_{R-S}=A_R-A_R\wedge A_S;$$
$$A_{R\cdot S}=A_R\circ A_S;$$
$$A_{R^{-1}}=A_R^T.$$

需要特别注意的是：遇到的关系是从什么集合到什么集合的？两个关系能不能进行某种运算(例如 $\cup$, $\circ$, …等)？

另外，矩阵运算 $A\vee B$, $A\wedge B$, $\sim A$, $A\circ B$, A^T 等在什么条件(或不需要条件)下可以进行？它们的含义是什么？这也是需要注意的.

有一类关系很重要，就是等价关系，有了一个等价关系，就可以把所考虑的集合 $\boldsymbol{X}$ 内的元素进行分类.

半序关系就是"大小"关系，但与通常的大小有点差别，即并不是任意两个元素都能讨论大小，所以半序关系是大小关系的推广.

习 题 3·1

1. 证明若 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{S}$ 均为 X 内的等价关系，则 $\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{S}$ 也是 X 内的等价关

系.

2. 设 $X=\{1, 2, 3, 4\}$ 内有一个关系

$$\boldsymbol{R}=\{(1, 2), (4, 3), (2, 2), (2, 1), (3, 1)\}.$$

问 $\boldsymbol{R}$ 是否传递?如果不传递,则能不能找到一个传递关系 $\boldsymbol{R}_1$, 使 $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{R}_1$("$\subset$"见定义 6)?这样的 $\boldsymbol{R}_1$ 是否只有一个?

3. 若 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. 问关系

$$\boldsymbol{R}=\{(x, y)\,|\,x-y \text{ 是 3 的倍数}\}$$

是否为等价关系? 试画出它的图形,并写出它的结合矩阵. 你能发现这图形和结合矩阵有什么特点?

4. 设有 n 个命题 $p_1, \cdots, p_n$, 令它们所组成的任意一个复合命题为一个元素, 全体元素组成集合 X(可能是无限集).证明在 X 内逻辑等价是一个等价关系. 并说明 X 按这个等价关系分类后,一共只有有限个等价类(即商集有有限个元素). [提示:考虑第一标准形.]

5. 设 X 为全体有序的正整数对. 在 X 内定义关系 $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R}=\{((x, y), (u, v))\,|\,(x, y)\in X, (u, v)\in X, \text{ 且 } xv=yu\}.$$

问 $\boldsymbol{R}$ 是不是等价关系?

6. 试找一个集合 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$内的等价关系,使 1, 2 分在一个等价类; 4, 5 分在另一个等价类; 但 3 自成一类.

7. 设 X 为全体自然数, m 为一个正整数,定义 X 内的"模 m 等价关系"(记成 $\overset{(\mathrm{mod}\, m)}{\equiv}$)为

$$\overset{(\mathrm{mod}\, m)}{\equiv}=\{(x, y)\,|\,x-y \text{ 能被 } m \text{ 整除}\}.$$

证明: $\overset{(\mathrm{mod}\, m)}{\equiv}$ 是等价关系,而且,若 $x_1\overset{(\mathrm{mod}\, m)}{\equiv}y_1$, $x_2\overset{(\mathrm{mod}\, m)}{\equiv}y_2$, 则 $x_1+x_2\overset{(\mathrm{mod}\, m)}{\equiv}y_1+y_2$, $x_1x_2\overset{(\mathrm{mod}\, m)}{\equiv}y_1y_2$.

8. 若 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$内有关系

$$\boldsymbol{R}=\{(1, 2), (2, 2), (3, 4)\},$$
$$\boldsymbol{S}=\{(1, 3), (2, 5), (3, 1), (4, 2)\}.$$

求 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}\circ(\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{R}^3$ 的结合矩阵.

9. 证明

(1) $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{S}\Leftrightarrow\boldsymbol{R}^{-1}\subset\boldsymbol{S}^{-1}$;

(2) $(\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S})^{-1}=\boldsymbol{R}^{-1}\cup\boldsymbol{S}^{-1}$;

(3) $(\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{S})^{-1}=\boldsymbol{R}^{-1}\cap\boldsymbol{S}^{-1}$;

(4) $(\overline{\boldsymbol{R}})^{-1}=\overline{(\boldsymbol{R}^{-1})}$;

(5) $(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{S})^{-1}=\boldsymbol{R}^{-1}-\boldsymbol{S}^{-1}$.

并分别写出(2)～(5)中关系的结合矩阵.

10. 如果 $\boldsymbol{R}$ 是等价关系,问 $\boldsymbol{R}^{-1}$ 是不是等价关系?

*11. 若 $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$ 均为等价关系, 问 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}$ 是否一定是等价关系? 是否一定非等价关系?若回答为“是”, 则予证明;若回答为“不是”, 则举出反例.

12. 证明: $\boldsymbol{R}\circ(\boldsymbol{S}\cup\boldsymbol{T})=(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})\cup(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T})$, $(\boldsymbol{S}\cup\boldsymbol{T})\circ\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R})\cup(\boldsymbol{T}\circ\boldsymbol{R})$;

$$\boldsymbol{R}\circ(\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T})\subset(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})\cap(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}).$$

举例说明第二个关系不能是等式.

13. 求证存在 X 内的一个关系(记成 $\boldsymbol{I}$),对任意一个 X 内的关系 $\boldsymbol{R}$,有

$$\boldsymbol{I}\circ\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{I}=\boldsymbol{R}.$$

此关系称为 X 内的**恒同关系**.

14. 设 $A\subset X$, $B\subset Y$, 令 X 到 Y 的关系为

$$\boldsymbol{R}=A\times B.$$

问 $\boldsymbol{R}^{-1}$ 是什么?

15. 设 $A\subset X$, 而 $\boldsymbol{R}$ 是 X 到 Y 的一个关系,令

$$\boldsymbol{R}[A]=\{y\mid y\in Y,\ \text{且}\ \exists x\in A,\ \text{使}\ x\boldsymbol{R}y\}$$

(即与 A 中的某个元素有 $\boldsymbol{R}$ 关系的 y 元素的全体).

求证:
$$\boldsymbol{R}[A\cup B]=\boldsymbol{R}[A]\cup\boldsymbol{R}[B];$$
$$\boldsymbol{R}[A\cap B]\subset\boldsymbol{R}[A]\cap\boldsymbol{R}[B].$$

16. 设 $\boldsymbol{I}$ 为 X 内的恒同关系,求证:对于 X 内的一个关系 $\boldsymbol{R}$, 有:

$\boldsymbol{R}$ 是返身的 $\Leftrightarrow \boldsymbol{I}\subset\boldsymbol{R}$;

$\boldsymbol{R}$ 是对称的 $\Leftrightarrow \boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{-1}$;

$\boldsymbol{R}$ 是传递的 $\Leftrightarrow \boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{R}$;

$\boldsymbol{R}$ 是传递的 $\Rightarrow \boldsymbol{R}^{-1}\circ\boldsymbol{R}^{-1}\subset\boldsymbol{R}^{-1}$;

$\boldsymbol{R}$ 是返身且传递的 $\Rightarrow \boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}$.

17. 若 $\boldsymbol{R}$ 是等价关系, $A\subset X$,则 A 是一个 $\boldsymbol{R}$ 等价类的充要条件是: 存

在 $x\in A$，使 $A=R[\{x\}]$（其中$\{x\}$表示只含 x 一个元素的集合）.

18. 设 X 为有限集，求证 X 内的一个关系 R 是等价关系的充分必要条件为：存在两两不交的 $A_1, \cdots, A_l$，使

(1) $X=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_l$;

(2) $R=(A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)\cup\cdots\cup(A_l\times A_l)$

同时成立.

第二节　映　　射

本节讨论集合到集合之间的一种对应关系，叫做映射. 在某种意义下，它也可以看成是一种特殊的关系.

定义 1　如果有一个对应规律，根据这个规律就能对任意的 $x\in X$，都能找出唯一的一个 $y\in Y$（不同的 x 找到的 y 也可以不同，也可以相同）与它相对应，则称这个对应规律为一个"映射". 一般地，用 f、g、h、…等表示一个映射. 对于映射 f，我们把与 x 相对应的 y 记成 $f(x)$，称为 x 在映射 f 下的象. f 是 X 到 Y 的映射，记成 $X\xrightarrow{f}Y$.

易见：$X\times Y$ 的子集合 F：

$$F=\{(x,f(x))\mid x\in X\}$$

是一个 X 到 Y 的关系，称为映射 f 的图象.

【例】　设 X 是一切命题组成的集，$Y=\{0,1\}$，则给命题以逻辑值 0 或 1，就是一个映射.

定理 1　X 到 Y 的一个关系 F 是 X 到 Y 的某个映射 f 的图象的必要且充分条件为：

对任意的 $x\in X$，存在唯一的 $y\in Y$，使 xFY.

【证】　必要性：若关系 F 是映射 f 的图象，那末

$$F=\{(x,f(x))\mid x\in X\}.$$

于是对任意的 $x\in X$, $x\boldsymbol{F}f(x)$, 又若 $y\in Y$ 且 $y\neq f(x)$, 则 $x\overline{\boldsymbol{F}}y$.

因此必要性成立.

充分性：如果关系 $\boldsymbol{F}$ 满足：对任意的 $x\in X$, 存在唯一的一个 y, 使 $x\boldsymbol{F}y$, 那末，令 f 为对应：$x\to y$, 它就是 X 到 Y 的一个映射. 由定义，得

$$y=f(x).$$

因此，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=\{(x,y)\mid x\in X,\ y\in Y,\ \text{且}\ x\boldsymbol{F}y\}\\&=\{(x,f(x))\mid x\in X\}.\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{F}$ 是映射 f 的图象. ▌

注1 映射可以有许多别的名称，如"变换"，"函数"，"对应"，"算子"等等，实质上都是一样的，具体含义在不同的书本上可能稍有出入. 如果 X 是实数集的一个子集，而 Y 是实数全体，那末 X 到 Y 的一个映射就是一个普通的函数，即数学分析中的函数，所以，映射的概念是普通函数概念的推广.

注2 由定理1，我们知道，给出一个映射 f 与给出它的图象 $\boldsymbol{F}$ 是一样的，而且这个图象就是一个特殊的关系，即满足条件：(1)一切 x 都有 y, 使 $x\boldsymbol{F}y$; (2)对于 x, 只有一个 y, 使 $x\boldsymbol{F}y$. 因此，给出映象 f 与给出一个满足上述条件(1)与(2)的关系 $\boldsymbol{F}$ 是等效的.

对于 x 到 Y 的一个一般的关系 $\boldsymbol{R}$, 我们称 X 中的集合

$$\{x\mid \exists y\in Y,\ x\boldsymbol{R}y\} \tag{2.1}$$

为 $\boldsymbol{R}$ 的定义域，记成 $\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$; 称 $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^{-1})$ 为 $\boldsymbol{R}$ 的值域，记成 $\mathscr{W}(\boldsymbol{R})$. 显然有

$$\mathscr{W}(\boldsymbol{R})=\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^{-1})\subset Y. \tag{2.2}$$

对于 $\boldsymbol{R}$ 的定义域 $\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$ 中的 x, 必存在 y, 使 $x\boldsymbol{R}y$, 但这种 y 可以不止一个，即 $\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$ 中的一个 x 可以对应 Y 中不止一个 y. 这种 x 到 y 的对应特点是：

(1) 只在 X 的某子集 $\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$ 上才有这种对应，或者说是 $\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$ 到 Y (更确切地，是到 $\mathscr{W}(\boldsymbol{R})$) 的对应.

(2) x 在这种对应下的象可以不止一个，即对应可能是多值的. 所以由 $\boldsymbol{R}$ 可以得到一个 $\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$ 到 Y 的多值映射.

定义 2 如果 $X\subset X_1$, f、f_1 分别为 X 到 Y 和 X_1 到 Y 的映射，而且

$$f_1(x)=f(x)\quad (x\in X),$$

则称 f_1 是 f 的扩张. 或 f 是 f_1 在 X 上的限制，记成 $f=f_1|_X$.

定义 3 X 到 Y 的映射 f 如果满足

$$\{f(x)\,|\,x\in X\}=Y.$$

则称 f 为在上的映射；否则，就称为在内的映射.

定义 4 X 到 Y 的映射 f 称为"一对一"的，如果它满足: $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$.

定义 5 若 $X\xrightarrow{f}Y$, $Y\xrightarrow{g}Z$, 则 $g(f(x))$ 是 X 到 Z 的一个映射，记成 $g\circ f$, 称为复合映射.

由这定义可以验证: 若还有 $Z\xrightarrow{h}W$, 则有

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f. \tag{2.3}$$

定义 6 设 f 是 X 到 Y 的一对一的在上的映射，那末以集合

$$\{(f(x),x)\,|\,x\in X\}$$

为图象的 Y 到 X 的映射叫做 f 的逆映射，记成 f^{-1}. 此时 f 叫做可逆的映射.

映射 I: $I(x)=x$ 叫做恒同映射，记为 I_X (表示这个恒同映射是在集合 X 上).

定理 2 X 到 Y 的映射 f 为可逆的充分必要条件是: 存在一个 Y 到 X 的映射 g, 使

$$g\circ f=I_X,\ f\circ g=I_Y\ (Y\text{ 上的恒同映射}). \tag{2.4}$$

在以上条件成立下，则有

$$f^{-1}=g.$$

【证】 必要性：已知 f 可逆，于是 f^{-1} 存在，取 $g=f^{-1}$ 就满足等式.

充分性：只需证明：在 $g\circ f=I_X$ 及 $f\circ g=I_Y$ 时，f 是一对一在上的.

在上性的证明：对任意的 $y\in Y$，由 $f\circ g=I_Y$ 可以得到

$$f(g(y))=(f\circ g)(y)=I_Y(y)=y.$$

即 f 把 X 中的 $g(y)$ 映为 y，所以 f 是在上的.

一对一性的证明：如果存在 $x_1, x_2\in X$ 使 $f(x_1)=f(x_2)$，于是 $(g\circ f)(x_1)=g(f(x_1))=g(f(x_2))=(g\circ f)(x_2)$，但是 $g\circ f=I_X$，所以 $x_1=x_2$. 这表示使象 $f(x)$ 相同的那些 x 是同一个（若有两个，则必相等）. 因此 f 是一对一的.

以上证明了充分必要条件. 在此条件成立下，显然有 $f^{-1}=g$，因为它们都是 $Y\to X$ 的映射，而且对同一个 $y\in Y$，有 $f^{-1}(y)=(f^{-1}\circ I_Y)(y)=(f^{-1}\circ f\circ g)(y)=(I_X\circ g)(y)=g(y)$. 】

注意 如果 $g\circ f=I_X$, $f\circ g=I_Y$ 中有一个不满足，则未必有 f^{-1} 存在，例如

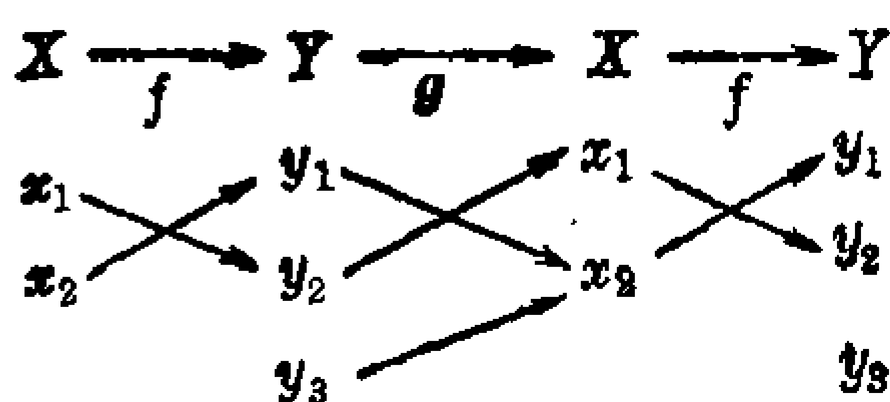


图 3-6

$X=\{x_1, x_2\}$, $Y=\{y_1, y_2, y_3\}$.

$f(x_1)=y_2$, $f(x_2)=y_1$; $g(y_1)=x_2$, $g(y_2)=x_1$, $g(y_3)=x_2$.

于是 $g\circ f=I_X$，但 $f\circ g\neq I_Y$，这是因为 $(f\circ g)(y_3)=f(g(y_3))=f(x_2)=y_1\neq y_3$. 所以在这例子中 f 并不是在上的，因此 f^{-1} 不存在.

定理 3 若 f、g 分别是 X 到 Y, Y 到 Z 的一对一在上映射，则 $(g\circ f)^{-1}$ 存在，且有

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}. \tag{2.5}$$

【证】 按定理 2 只要证明（注意 $g\circ f$ 从 X 到 Z）：

$$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)=I_X,\quad (g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})=I_Z.$$

这可由$f^{-1}\circ f=I_X$及$g\circ g^{-1}=I_Z$得到. ▌

注意 如果$X\xrightarrow{f}Y$是一对一但不是在上的，那末令

$$W(f)=\{f(x)\,|\,x\in X\}, \tag{2.6}$$

于是f在X到$W(f)$是一对一在上的映射，因此f在$W(f)$有一个逆映射，记成$f^{-1}_{W(f)}$，但是f作为X到Y的映射并不存在逆映射. 我们有时把$f^{-1}_{W(f)}$叫做f的部分逆.

定义 7 设f为X到Y的一个映射，对$A\subset X$，记

$$f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}, \tag{2.7}$$

称为A在f下的象集. 对$B\subset Y$，记

$$f^{-1}(B)=\{x\,|\,x\in X,\ f(x)\in B\}, \tag{2.8}$$

称为B在f下的原象集.

显然，若$A_1\subset A_2$，则$f(A_1)\subset f(A_2)$；若$B_1\subset B_2$，则$f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$.

定理 4 设$X\xrightarrow{f}Y$，则对A_1, $A_2\subset X$，有

(1) $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$;

(2) $f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_1)$，但不一定相等.

对于B_1, $B_2\subset Y$，有

(1°) $f^{-1}(B_1-B_2)=f^{-1}(B_1)-f^{-1}(B_2)$ （集合减法）;

(2°) $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$;

(3°) $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$.

而且有

$$f^{-1}[f(A_1)]\supset A_1; \tag{2.9}$$

$$f[f^{-1}(B_1)]\subset B_1. \tag{2.10}$$

【证】 若$x\in A_1$，则$f(x)\in f(A_1)$，按定义$x\in f^{-1}[f(A_1)]$.

所以$A_1\subset f^{-1}[f(A_1)]$（但是未必有$A_1=f^{-1}(f(A_1))$，因为很

可能在 A_1 外还有 x_1，使 $f(x_1)$ 与 A_1 中某个 x 的 $f(x)$ 一样，因而 $f(x_1)$ 也属于 $f(A_1)$，于是 $x_1 \in f^{-1}(f(A_1))$ 而不属于 A_1）. 其次，按原象的定义，有 $f[f^{-1}(B_1)] \subset B_1$（但是也未必有 $f(f^{-1}(B_1)) = B_1$，因为 B_1 中很可能包含某个 y_1，它并不是任何 x 的象 $f(x)$，那末 $y_1 \overline{\in} f[f^{-1}(B)]$ 而属于 B_1）.

(1) 的证明：$A_1 \subset A_1 \cup A_2$，所以 $f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$；同理 $f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$，因此 $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$；反之，若对任意的 $x \in A_1 \cup A_2$，则或者 $x \in A_1$，或者 $x \in A_2$. 如果 $x \in A_1$，则 $f(x) \in f(A_1)$；如果 $x \in A_2$，则 $f(x) \in f(A_2)$. 总之，不管哪种情形，都有 $f(x) \in f(A_1) \cup f(A_2)$，由 x 在 $A_1 \cup A_2$ 中的任意性可知：$f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$. 与上面的 $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$ 结合起来，就得到(1).

(2) 的证明：$A_1 \cap A_2 \subset A_1$，故 $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1)$，同理 $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$，所以 $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$（但是并不一定有 $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ 成立，这是因为很可能 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$，而同时 $f(A_1) \cap f(A_2)$ 却非空）.

(1°) 的证明：若 $x \in f^{-1}(B_1 - B_2)$，则 $f(x) \in B_1 - B_2$. 因此 $f(x) \in B_1$ 且 $f(x) \overline{\in} B_2$，即 $x \in f^{-1}(B_1)$ 且 $x \overline{\in} f^{-1}(B_2)$. 所以 $x \in f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$. 由此 $f^{-1}(B_1 - B_2) \subset f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$；反之，$x \in f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$，则 $x \in f^{-1}(B_1)$ 且 $x \overline{\in} f^{-1}(B_2)$，这就是说：$f(x) \in B_1$ 且 $f(x) \overline{\in} B_2$，即 $f(x) \in B_1 - B_2$，所以 $x \in f^{-1}(B_1 - B_2)$，这样就得到另一包含式 $f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 - B_2)$. 结合起来，就得到(1°).

(2°)，(3°) 的证明与(1°)完全类似. 请读者自证. ▌

习　题　3·2

1. 求证若 X 是有限集，则 X 到 X 的映象 f 为在上的 $\Leftrightarrow f$ 为一对

一的.

2. 若 $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} Z$. (1)当 f, g 在上时, $g \circ f$ 是否也在上? (2)当 f, g 一对一时, $g \circ f$ 是否也一对一?

3. 求证存在一个从 $X \times Y$ 到 $Y \times X$ 的一对一在上映象.

4. 令 $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $X \xrightarrow{f} X$, 其中 f 由下面方式确定: $f(x) = 3x \pmod 5$(即 $f(x) = 3x$ 用 5 除后的余数). 问 f 是否在上? 是否一对一?

5. 设在 $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$上

$$f(x) = 3x \pmod 4).$$

问它是不是 $X \to X$ 的在上映射?是否一对一?

6. 下述集合中哪些集合是某个映射的图象?是什么映射的图象?是从什么集合到什么集合的映射?

(1) $\{(1, (2, 3)), (2, (3, 4)), (3, (1, 4)), (4, (1, 4))\}$;

(2) $\{(1, (2, 3)), (2, (3, 1)), (3, (3, 2))\}$;

(3) $\{(1, (2, 3)), (2, (3, 1)), (1, (2, 1))\}$;

(4) $\{(1, (2, 3)), (2, (2, 3)), (3, (2, 3))\}$.

7. 写出从 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ 到 $Y = \{y_1, y_2\}$ 的所有各种不同可能的映射,并指出哪些是一对一的,哪些是在上的.

8. 求证若 N 是全体非负整数,则从 $N \times N$ 到 N 的映射

$$f(x, y) = x + y \quad 及 \quad g(x \cdot y) = x \cdot y$$

都是在上的,但都不是一对一的.

9. 设 R 是实数集, $X = R \times R$, X 到 X 的映射为

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)),$$
$$g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y)).$$

求 $g \circ f$ 及 $f \circ g$.

10. 设 R 是实数集,

$$X = R \times R, \ Y = R^3,$$

X 到 Y 的映射为

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)),$$

Y 到 X 的映射为 $g(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z))(x \in X, y \in Y, z \in Z)$, 求 $g \circ f$ 及 $f \circ g$.

第三节 运　　算

如果给出了一种对应规则(或对应关系)，使对于集合 X 中任意给定的两个元素(按一定的次序)，都能对应于 X 中的一个元素，这种对应关系就是本节所讨论的"运算". 这种运算要求运算结果所得到的元素还在 X 内. 所以实际上是一种封闭的运算，即被施以运算的元素和运算后得到的元素都要求在同一集合内. 为什么我们要求有这种"封闭"性的限制呢？这是因为：这一类运算有许多共同的特性，同时这类运算包括了非常多的常见的运算.

【例 1】 X 是全体整数，则 $+$，$\times$，$-$，$\wedge$，$\vee$ 都是具有这种封闭性的运算，但是，$\div$ 却不是，这是因为两个整数相除的结果可能不是整数，出了 X 的范围，从而不满足封闭性要求. 在全体有理数中，$+$，$-$，$\times$，$\wedge$，$\vee$ 都是具有这种封闭性的运算，但是 $\div$ 不满足封闭性，这因为 $1\div 0$ 无意义，更谈不上是 X 中的元素了.

我们把这种要求具有封闭性的对应关系写成如下的定义：

定义 1 集合 $X\times X$ 到 X 的一个映射 f 叫做 X 内的一种运算.

对任意 x, $y\in X$，那末 $(x, y)\in X\times X$，它通过映射 f 后的象为 $f(x, y)$，$f(x, y)$ 就是 X 中的两元素 x、y (有次序的，x 在前，y 在后)经运算 f 后所得的结果. 按定义，我们要求 $f(x, y)$ 仍在 X 内.

例如：X 为全体实数，若 f 代表加法运算，则 $f(x, y)=x+y$；若 g 代表乘法运算，则 $g(x, y)=xy$；若 h 代表运算"取

较大者”，则 $h(x, y)=x\vee y$.

有时，为了使读者对运算 $f(x, y)$ 具有更直观的形象，我们用 $x\circledcirc y$ 代表 $f(x, y)$，这就很直观地显示出 $x\circledcirc y$ 是 x 在前与 y 在后，经运算$\circledcirc$所得的结果.

更一般地，集合 $X^n=\overbrace{X\times\cdots\times X}^{n\text{次}}$（$X^n$ 定义为：$X^1=X$，$X^2=X\times X$，…，$X^n=X^{n-1}\times X$）到 X 的一个映射 f 叫做 X 内的一个 n 元运算.

【例 2】 X 为全体实数，那末连加、连乘、连减、都是一种多元运算，而 $-x$ 是一种一元运算.

【例 3】 X 为全体复数，则 $+$，$-$，$\times$ 都是 X 内的运算. 把 X 的元素按字典序（第一节 1·2 例 4）给以大小后，那末 $\vee$、$\wedge$ 也都是运算.

$X=\{a+b\sqrt{2}\mid a, b \text{整数}\}$，则“$+$”，“$-$”，“$\times$”都是 X 内的运算.

$X=$集合 U 的全体子集，则 $\cup$，$\cap$，$-$ 都是运算，而取补集的运算是一个一元运算.

$X=$空间向量的全体，则向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{b}$ 的向量积（叉乘或外积）$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 是 X 内的运算，但是数量积（数乘或内积）$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 不是 X 内的运算，因为 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 不再属于 X.*)

$X=n$ 阶矩阵全体，则矩阵加，矩阵减，矩阵乘，$\vee$，$\wedge$ 都是 X 内的运算.

$X=n$ 阶结合矩阵（即元素只能为 0 和 1 的矩阵）全体，则 $\vee$，$\wedge$，$\circ$ 都是 X 内的运算，$\sim$ 是 X 内的一个一元运算. 但是矩阵加、矩阵减、矩阵乘都不是这里的运算，因为两个结合矩阵加、减或乘的结果虽是矩阵，但不再是结合矩阵了.

---

*) 可参阅本丛书《空间解析几何》中有《向量代数》的章节.

X 为全体命题，则 $\vee$、$\wedge$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$ 都是 X 内的运算，而 $\sim$ 是 X 内的一个一元运算。

X 为集合 E 内(即 E 到 E)的关系的全体，则关系间 $\cup$，$\cap$，$\circ$ 都是 X 内的运算，而"$\sim$"是 X 内的一个一元运算。

X 为集合 E 到 E 的映射的全体，则(复合映射)$\circ$ 是 X 内的运算。

X 为集合 E 到 E 的一对一在上映射的全体，则逆是 X 内的一个一元运算。

【例 4】 $X=\{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$($p$ 为正整数 $\geqslant 2$)，则模 p 加法：x、$y\in X$，$x+y \pmod p$ (即 $x+y$ 被 p 除后的余数)，模 p 乘法 $xy \pmod p$ 都是 X 内的运算。如果认为 -1 除以 p 的余数是 $p-1$，-2 除以 p 的余数是 $p-2$，$\cdots$，那末模 p 减法 $x-y \pmod p$ 也是 X 内的运算。

【例 5】 设坐标平面上全部的点为 U，给以一个实数 θ 后，令 T_θ 表示 U 到 U 的一个映射，它把点 $(x, y)\in U$ 变成

$$T_\theta(x, y)=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)\in U.$$

那末复合映射

$$\begin{aligned}(T_\varphi\circ T_\theta)(x, y)&=T_\varphi(T_\theta(x, y))\\&=T_\varphi(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)\\&=([x\cos\theta-y\sin\theta]\cos\varphi-[x\sin\theta+y\cos\theta]\\&\quad\times\sin\varphi,\ [x\cos\theta-y\sin\theta]\sin\varphi\\&\quad+[x\sin\theta+y\cos\theta]\cos\varphi)\\&=(x\cos(\theta+\varphi)-y\sin(\theta+\varphi),\\&\quad x\sin(\theta+\varphi)+y\cos(\theta+\varphi))\\&=T_{\theta+\varphi}(x, y).\end{aligned}$$

所以

$$T_\varphi\circ T_\theta=T_{\theta+\varphi}.$$

如果令 $X=\{T_\theta \mid \theta \text{ 为实数}\}$，那末运算 $\circ$ 是 X 内的运算。

又若 $$X=\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\middle|\ \theta\ 实数\right\},$$

则易证

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos(\varphi+\theta) & \sin(\varphi+\theta)\\ -\sin(\varphi+\theta) & \cos(\varphi+\theta)\end{pmatrix}.$$

所以矩阵乘法是 X 内的运算.

【例 6】 如果 E 是有限集 $\{x_1, \cdots, x_n\}$，则 E 到 E 的一个一对一映射 f 叫做 E 上的一个置换. 置换可以有一种简单表达法，就是置换表. 例如

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n-1 & n\\ 2 & 3 & \cdots & n & 1\end{pmatrix}$$

表示 $f(x_1)=x_2$, $f(x_2)=x_3$, $\cdots$, $f(x_{n-1})=x_n$, $f(x_n)=x_1$. 又如

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

表示恒等映射 $f(x_i)=x_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$. 对两个置换表可以由运算∘定义如下的“乘法”，它们的乘积也是一个置换表.

如果映射 f, g 分别为置换表

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}.$$

那末令

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}$$
$$=映射\ f\circ g\ 对应的置换表\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\end{pmatrix}.$$

例如 $$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

(等号左边第一个表中1对于2，第2个表中2对应3，从而得到等号右边1下面的3).

确定$f\circ g$的一般规则是：k_1是g置换表中i_1对应的元素j_{i_1}，…，k_n是g置换表中i_n对应的元素j_{i_n}.

按照这个规则，可求得

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}.$$

由于"$\circ$"是在全体映射内的一个运算，所以置换的乘法就自然地成为全体置换(记成X)内的一个运算.

注　在置换表中最重要的是上面一排数字1, 2, …, n与下面一排数字之间的对应关系. 上面一排也可以不按1, 2, …, n次序排列，只要对应关系一样，就代表全体置换内的同一个映射，因而也就认为它们代表同一个置换表，例如

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}\text{ 与 }\begin{pmatrix}3&1&4&2&5&\cdots&n\\i_3&i_1&i_4&i_2&i_5&\cdots&i_n\end{pmatrix}$$

就是同一个置换表，这是因为上面一排中同一个数字对应于下面一排中同样的数.

定义2　X内任意给定的一个运算$\odot$，如果满足：

对任意的$x, y\in X$，均有$x\odot y=y\odot x$，

则称$\odot$是可交换的；

如果满足：对任意的$x, y, z\in X$，均有

$$(x\odot y)\odot z=x\odot(y\odot z),$$

则称$\odot$是可结合的.

定义3　X内任意给定的两个运算$\oplus$和$\odot$，如果满足：对任意的x、y、$z\in X$，均有

$$x\odot(y\oplus z)=(x\odot y)\oplus(x\odot z)$$

（或相应地$(y\oplus z)\odot x=(y\odot x)\oplus(z\odot x)$），

则称运算 $\odot$ 对运算 $\oplus$ 是*左分配的*；括弧中称为是*右分配的*。

【例7】 上面例1至例6中列举的一些 X 及 X 内的运算，除了减法及向量的向量积 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$，矩阵的乘法，结合矩阵的运算 $\circ$，关系间的运算 $\circ$，映射间的复合运算 $\circ$ 及置换间的乘法等是不可交换的以外，其它都是交换的；除了减法及向量积 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 以外，其它都是可结合的。

【例8】 有些运算虽然没有交换性和结合性，但有一些类似的性质，例如 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 中的向量积运算 $\times$，就有与交换性有点类似的反交换性：

$$\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

还有与结合性稍有点类似的性质：

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0.$$

熟悉向量代数的读者易于检查这一点；不熟悉的读者可以不考虑。

【例9】 集合运算、关系的运算 $\cup$ 对 $\cap$ 以及 $\cap$ 对 $\cup$ 都有分配性；

命题的运算 $\vee$ 对 $\wedge$ 以及 $\wedge$ 对 $\vee$ 也都有分配性；

向量的向量积、矩阵的乘法分别对向量的加法和矩阵的加法有分配性；

模 p 乘法对模 p 加法有分配性；

关系运算 $\circ$ 对 $\cup$ 有左分配性及右分配性（但对 $\cap$ 没有分配性）（见习题3·1第12题）。

定义4 如果对 X 内的运算 $\odot$ 存在 X 中一个元素（记为 e_l），使对一切的 $x\in X$，均有

$$e_l\odot x=x,$$

则称 e_l 是运算 $\odot$ 的*左单位元*。

如果存在 X 中的一个元素(记为 e_r)，使对一切 $x\in X$，均有

$$x\odot e_r=x,$$

则称 e_r 为运算 $\odot$ 的右单位元.

如果存在 X 中的一个元素(记为 e)，使对一切 $x\in X$ 均有

$$e\odot x=x\odot e=x$$

(即 e 既是左单位元又是右单位元)，则称 e 是运算 $\odot$ 的单位元.

定理 1 如果 X 内的运算 $\odot$ 存在单位元，则这种单位元只能有一个；如果 $\odot$ 分别存在左单位元和右单位元，则 $\odot$ 存在单位元；如果 $\odot$ 可交换，则 $e_r=e_l$.

【证】 如果 $\odot$ 有两个单位元 e_1 及 e_2，那末

$$\begin{aligned} e_1&=e_2\odot e_2 \quad &(e_2\text{ 是单位元})\\ &=e_2 \quad &(e_1\text{ 是单位元}). \end{aligned}$$

可见它们必须相等，因此单位元只能有一个.

如果 $\odot$ 有左单位元 e_l 及右单位元 e_r，那末

$$\begin{aligned} e_l&=e_l\odot e_r \quad &(e_r\text{ 是右单位元})\\ &=e_r \quad &(e_l\text{ 是左单位元}). \end{aligned}$$

既然 $e_l=e_r$，它就是一个单位元.

定理的最后一句话是显然的. 】

【例 10】 实数的减法运算有一个右单位元 0(如实数 $a-0=a$)，但没有左单位元. 因而没有单位元.

实数的加法有一个单位元 0(如实数 $a+0=0+a=a$).

实数的乘法有一个单位元 1(如实数 $a\cdot 1=1\cdot a=a$).

集合的 $\cup$ 有单位元 $\emptyset$，$\cap$ 有单位元全集.

命题的 $\vee$ 有单位元 **0**，$\wedge$ 有单位元 **1**.

关系的 $\cup$ 有单位元空关系 $\emptyset$，$\cap$ 有单位元满关系 $X\times X$，$\circ$ 有单位元 $I=\{(x, x)\mid x\in X\}$.

若 X 为集合 E 到 E 的一对一在上映射的全体，则 X 内的运算 $\circ$ 有单位元 I，它是恒等映射，即对一切 $x\in X$，有 $I(x)=x$.

矩阵的加法有单位元 O（所有元素都为 0 的矩阵）；矩阵的乘法有单位元 I，它是对角线上都是 1，而其它的元素都是 0 的矩阵.

熟悉向量代数的读者可以证明向量积运算 $\times$ 没有单位元.

定义 5 如果对 X 内的运算 $\odot$ 存在 X 中的一个元素 0_l，使对一切的 $x\in X$，均有

$$0_l\odot x=0_l$$

则称 0_l 是 $\odot$ 的*左零元*.

如果存在 X 中的一个元素 0_r，使对一切的 $x\in X$，均有

$$x\odot 0_r=0_r,$$

则称 0_r 是运算 $\odot$ 的*右零元*.

如果存在 X 中的一个元素 0，使对一切的 $x\in X$，均有

$$0\odot x=x\odot 0=0,$$

则称 0 是运算 $\odot$ 的*零元*.

定理 2 如果 X 内运算 $\odot$ 存在零元，则这种零元只能有一个；如果 $\odot$ 分别存在左零元和右零元，则 $\odot$ 存在零元；如果 $\odot$ 可交换，则 $0_l=0_r$.

证明与定理 1 类似. 读者可自己仿证.

【例 11】 实数乘法运算有零元 0.

集合的运算 $\cup$ 有零元全集，集合的运算 $\cap$ 有零元 $\emptyset$.

命题的运算 $\vee$ 有零元 **1**，$\wedge$ 有零元 **0**.

关系的运算 $\cup$ 有零元满关系 $X\times X$, $\cap$ 有零元空关系 $\emptyset$.

矩阵乘法有零元零矩阵 O.

定义 6 对于 X 内的有单位 e 的一个运算 $\odot$ 而言，如果存在 X 中的一个元素 a_e^{-1}, 使

$$a_e^{-1}\odot a=e,$$

则称 X 中的元素 a 有*左逆*，左逆即为 a_e^{-1}.

同样，如果存在 X 中的一个元素 a_r^{-1}, 使

$$a\odot a_r=e,$$

则称 X 中的元素 a 有*右逆*，右逆即为 a_e^{-1}.

如果存在 X 中的一个元素 a^{-1}, 使

$$a^{-1}\odot a=e,\quad a\odot a^{-1}=e,$$

则称元素 a 为*可逆的*，a 的逆元即为 a^{-1}.

定理 3 设 X 内的运算 $\odot$ 是结合的，而且有单位元，那末对任意固定的 $a\in X$,

(1) 如果 a 可逆，则 a 的逆是唯一的；

(2) 如果 a 存在左逆和右逆，则 a 可逆；

(3) 如果 $\odot$ 可交换，则 $a_e^{-1}=a_r^{-1}$.

【证】 证明的思路与定理 2 类似.

(1) 如果 a 有两个逆元 a_1^{-1} 和 a_2^{-1}: 设 a_1^{-1} 是 a 的左逆元，a_2^{-1} 是 a 的右逆元，由 $\odot$ 的结合性，可以得到

$$a_1^{-1}=a_1^{-1}\odot(a\odot a_2^{-1})=(a_1^{-1}\odot a)\odot a_2^{-1}=a_2^{-1}.$$

所以 a 的逆只能有一个.

(2) 若 a 有左逆元 a_l^{-1} 和右逆元 a_r^{-1}, 那末

$$a_l^{-1}=a_l^{-1}\odot(a\odot a_r^{-1})=(a_l^{-1}\odot a)\odot a_r^{-1}=a_r^{-1}.$$

所以左逆就是右逆，因而就是 a 的逆.

(3) 是显然的. ▌

零元一定不可逆，单位元一定可逆.

【例 12】 (1) 对通常的加法运算每个元都是可逆的.

(2) 对通常的乘法运算，除零元外，每个元都是可逆的.

(3) 若 $X=\{0, 1, \cdots, p-1\}$, $\odot$ 为模 p 乘法. 那末 0 是零元，1 是单元. 如果 p 是质数，那末对 $a\in X$，且 $a\neq 0$，必定存在 a^{-1}. 这是因为 $1\cdot a$, $2\cdot a$, $\cdots$, $(p-1)a$ 一共有 $p-1$ 个，在 $\bmod p$ 意义下，这 $p-1$ 个元素都不等于 0 且不相同. 不等于零是显然的，因为它们都不能被 p 整除. 它们是不相同的，证明如下：假若不然，例如有 $ma \overset{(\bmod p)}{\equiv} na$ $(m<n<p)$，那末 $(n-m)a\equiv 0 (\bmod p)$，从而 p 能整除 $(n-m)a$，这在 p 为质数时是不可能的. 于是这 $p-1$ 个元素中必有一个为 1，例如说 $ma\equiv 1 (\bmod p)$，那末 $a^{-1}=m (\bmod p)$. 另一方面，如果 p 不是质数，那末总存在 p 的两个因子 p_1 和 p_2，使 $p=p_1p_2$，而且 $0<p_1$, $p_2<p$，于是 p_1、$p_2\in I$，但是 $p_1p_2\equiv 0 (\bmod p)$，这说明 p_1 和 p_2 不可能有逆元，因为如果相反，例如说 p_1 有逆元 p_1^{-1}，那末就有

$$p_2\equiv p_2p_1p_1^{-1}\equiv (p_2p_1)p_1^{-1}\equiv 0\cdot p_1^{-1}\equiv 0$$

$(\bmod p)$ 这与 $0<p_2<p$ 相矛盾.

(4) 熟悉代数的读者可知道 n 阶矩阵在其行列式不等于 0 时，有乘法逆元素(即逆矩阵).

(5) 对矩阵的加法运算，每个矩阵都有逆元素，这种逆元就是原来矩阵中相应元素的负值所组成的矩阵.

(6) 对关系的运算"$\circ$"，$\boldsymbol{R}$ 具有逆元的充要条件是

$$\{x \mid x\in X, \exists y\in X, x\boldsymbol{R}y\}$$
$$=\{y \mid y\in X, \exists x\in X, 使\ x\boldsymbol{R}y\}=X.$$

此时第一节中的 $\boldsymbol{R}^{-1}$ 就是 $\boldsymbol{R}$ 的逆元. 证明留给读者.

对映射的运算"∘"，在全体 X 的一对一的在上映射中都是有逆的．反之也对．

归纳本节要点

本节列举了一些常见的运算(它们都是在某一个已知集合 X 内的运算)，研究了它们可能有的一些共同规律：交换性、结合性和分配性．还研究了单位元、零元、逆元的存在性条件．这些都是最一般的规律和现象，是较为抽象的概括．

习 题 3·3

1. 令 $E=\{0, 1, \cdots, p-1\}$，任给 $x_0\in E$，

(1) 求证：模 p 加法 $x+x_0 \pmod p$ 确定了一个 E 内的一对一在上映射．对 $p=3$ 和 4 写出这个映射的置换(不同的 x_0 得到不同的置换)．

(2) 对模 p 乘法 $xx_0 \pmod p$，试述结论如何？

2. 设 X 是全体正整数，在 X 内定义运算：

$$x\odot y=x^y \quad (x\ \ y\in X).$$

问$\odot$是否交换？是否结合？

3. 设 X 是全体正整数，在 X 内定义运算：

$x\odot y=x$ 和 y 的最大公约数；

$x\odot y=x$ 和 y 的最小公倍数．

试研究这两个运算的性质．

4. 设 $X=[0, 1]$，令

$$x\vee y=\max(x, y);\quad x\wedge y=\min(x, y).$$

求证：$\vee$、$\wedge$ 都是可交换的和结合的；$\vee$ 对 $\wedge$ 满足分配律，$\wedge$ 对 $\vee$ 也满足分配律．又问 $\vee$ 有没有单位元和零元？X 中哪些元素对 $\vee$ 有逆元？逆元是什么？$\wedge$ 有没有单位元和零元？X 中哪些元素对 $\wedge$ 有逆元？逆元是什么？

*5. 设 X 是论域 U 上的全体弗晰集，试讨论弗晰运算 $\cup$ 及 $\cap$ 的性质(交换性、结合性、分配性；单位元、零元、逆元)．

6. 集合 E 到 $[0, 1]$ 的一个如下的映射叫做 E 的子集 A 的示性函数(或特征函数),并记成 $\chi_A(x)$:

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A;\\ 0, & x\overline{\in} A.\end{cases}$$

设 X 为这种示性函数的全体,我们定义

$$\chi_A\vee\chi_B=\chi_A+\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B.$$

求证:通常的乘法 · 及 $\vee$ 都是 X 内的运算. 试讨论这两种运算的各种性质.

7. 设 X 为全体整数,令

$$x\odot y=x+y-xy\quad(x, y\in X).$$

试讨论运算$\odot$的性质.

8. 若 $E=\{x_1,x_2,x_3\}$, $X=\{E$ 内一对一在上映射的全体$\}$, 把 X 中的元素看成置换后,试列出 X 的所有元素,并写出关于运算 $\circ$ 的单位元;指出每个元素是否有逆元,逆元是什么.

9. 令 $X=\{E$ 的全体子集$\}$,定义 A、B 的对称差 $\triangle$:

$$A\triangle B=A\cup B-A\cap B\quad(A, B\in X).$$

试讨论运算 $\triangle$ 的性质; $\cup$, $\cap$ 对 $\triangle$ 有无分配性?单位元、零元、逆元是否存在?

第四节　常见的代数系统

4.1 一般概念

定义1 一个集合 X 以及 X 内的几种运算(也可以是 n 元运算)放在一起, 叫做一个**代数系统**. 在 X 内有 k 种运算 $\odot_1$, $\odot_2$, $\cdots$, $\odot_k$ 的代数系统用记号 $(X, \odot_1, \odot_2, \cdots, \odot_k)$ 表示之.

【例1】 (1) 若 X 是集合 E 的全体子集,则$(X; \cup, \cap, -)$是一个代数系统;

(2) 若 X 是全体谓词公式, 则$(X; \vee, \wedge, \sim, \rightarrow, \leftrightarrow)$

是一个代数系统；

(3) 若 X 是集合 E 内的全体关系，则 $(X; \cup, \cap, \sim, \circ)$ 是一个代数系统；

(4) 若 X 是集合 E 内的全体映射，则 $(X; \circ)$ 是一个代数系统；

(5) 若 X 是 n 阶结合矩阵的全体，则 $(X; \vee, \wedge, \sim, \circ)$ 是一个代数系统；

(6) 若 X 是 n 阶矩阵全体，则 $(X; \times, +, -)$ 是一个代数系统；

(7) 若 X 是 n 个元素的置换全体，则 $(X; \times)$ 是一个代数系统（X 表示置换乘法）；

……。

【例 2】 设 $E=\{1, 2, \cdots, n\}$，令 τ 为 E 内一个一元运算：

$$\tau(j)=\begin{cases}j+1, & j\neq m;\\ 1, & j=m.\end{cases}$$

我们把它叫做循环移位运算．于是 (E, τ) 就是一个代数系统．

【例 3】 令

$$X=\{0\cdot a_1a_2\cdots a_n \mid a_i=0 \text{ 或 } 1\}$$

对 $x=0\cdot a_1a_2\cdots a_n$ 和 $y=0\cdot b_1b_2\cdots b_n$ 定义按位加法 $\oplus$：

$$x\oplus y=0\cdot c_1c_2\cdots c_n.$$

其中
$$c_i=\begin{cases}1, & \text{若 } a_i\neq b_i;\\ 0, & \text{若 } a_i=b_i.\end{cases}$$

于是 $(X; \ominus)$ 是一个代数系统．

定义 2 若 $(X; \circledcirc)$，$(Y; \odot)$ 是两个代数系统，如果存在一个 X 到 Y 的映射 f，使对于任意的 $x_1, x_2\in X$，有

$$f(x_1 \circledcirc x_2)=f(x_1)\odot f(x_2).$$
则称$(X;\circledcirc)$与$(Y;\odot)$同态，记成$(X;\circledcirc)\sim(Y;\odot)$，并称$f$为$X$到$Y$的同态映射.

如果f是在上的，则称f为满同态映射；

如果f是一对一的，则称f为单值的同态映射.

单值的满同态映射称为同构映射.

如果$(X;\circledcirc)$与$(Y;\odot)$之间存在同构映射，则称$(X;\circledcirc)$与$(Y;\odot)$同构，记成$(X;\circledcirc)\cong(Y;\odot)$.

如果$(X;\circledcirc)$，$(Y;\odot)$同态且$Y\subset X$，则称同态映射f为自同态映射.

如果$(X;\circledcirc)$，$(X;\odot)$同构，则称同构映射f为自同构映射.

直观上，同态是说：在X内的运算$\circledcirc$与Y内的运算$\odot$实质上“差不多”．同构是说：实质上是一样的.

显然，如果$(X;\circledcirc)$与$(Y;\odot)$同构，$(Y;\odot)$与$(Z;\odot)$同构，则$(X;\circledcirc)$与$(Z;\odot)$同构.

如果$(X;\circledcirc)$与$(Y;\odot)$有一个在上同态，而$(Y;\odot)$与$(Z;\odot)$同态，则$(X;\circledcirc)$与$(Z;\odot)$同态.

【例4】 若N是全体自然数，$Z_4=\{0, 1, 2, 3\}$，$\oplus_4$为模4加法，即对x, $y\in Z_4$，有
$$x\oplus_4 y=x+y(\bmod 4);$$
又设$E=\{0, 1\}$，$\oplus$为按位加法，即对a、$b\in E$，有
$$a\oplus b=\begin{cases}1, & 当\ a\neq b;\\ 0, & 当\ a=b.\end{cases}$$
那末$(N;+)$与$(Z_4;\oplus_4)$在上同态；$(Z_4;\oplus_4)$与$(E;\oplus)$在上同态.

这是因为：如果令

$$(N;+)\xrightarrow{f}(Z_4;\oplus_4)\xrightarrow{g}(E;\oplus),$$

其中映射 f、g 定义如下：对于 $x\in N$，令

$$f(x)=x\text{ 被 4 除的余数};$$

对 $y\in Z_4$，令

$$g(y)=\begin{cases}0, & \text{当 } y=0\text{ 或 }2\text{(即当 }y\text{ 为偶数)};\\ 1, & \text{当 } y=1\text{ 或 }3\text{(即当 }y\text{ 为奇数)}.\end{cases}$$

那末对于 x_1，$x_2\in N$，有

$$\begin{aligned}f(x_1+x_2)&=x_1+x_2\text{ 被 4 除的余数}\\&=(x_1\text{ 被 4 除的余数})\oplus_4(x_2\text{ 被 4 除的余数})\\&=f(x_1)\oplus_4 f(x_2);\end{aligned}$$

又对 y_1、$y_2\in Z_4$，有

$$g(y_1\oplus_4 y_2)=\begin{cases}0, & \text{若 } y_1\oplus_4 y_2\text{ 是偶数};\\ 1, & \text{若 } y_1\oplus_4 y_2\text{ 是奇数}.\end{cases}$$

但是

$$\begin{aligned}g(y_1)\oplus g(y_2)&=\begin{cases}0, & \text{若 } g(y_1)=g(y_2)\\ & \text{(即 }y_1\text{ 与 }y_2\text{ 的奇偶性相同)}\\ 1, & \text{当 } g(y_1)\neq g(y_2)\\ & \text{(即 }y_1\text{ 与 }y_2\text{ 奇偶性不同)}\end{cases}\\&=\begin{cases}0, & \text{(当 }y_1\oplus_4 y_2\text{ 是偶数)};\\ 1, & \text{(当 }y_1\oplus_4 y_2\text{ 是奇数)}.\end{cases}\end{aligned}$$

所以 $$g(y_1\oplus_4 y_2)=g(y_1)\oplus g(y_2).$$

因此，f、g 分别是 $(N;+)$ 到 $(Z_4;\oplus_4)$ 和 $(Z_4;\oplus_4)$ 到 $(E;\oplus)$ 的在上同态映射（在上性请读者自己考虑）.

同理，若 $Z_p=\{0,1,\cdots,p\}$，$\oplus_p$ 为模 p 加法，即对 x、$y\in Z_p$，有

$$x\oplus_p y=x+y\pmod p.$$

那末 $(N;+)$ 与 $(Z_p;\oplus_p)$ 在上同态.

【例 5】 若 $X=\{$集合 E 的全体子集$\}$, $Y=\{E$ 上全体示性函数*)$\}$,则$(X;\cup,\cap)\cong(Y;\vee,\cdot)$,这是因为

$$f:\ f(A)=\chi_A$$

就是一个同构映射.

【例 6】 若 $X=\{$有限集合 E 内全部关系$\}$, $Y=\{$全体结合矩阵$\}$,则

$$(X;\cup,\cap,\sim,\circ)\sim(Y;\vee,\wedge,\sim,\circ).$$

如果 E 有 n 个元素, $Z=\{$全体 n 阶结合矩阵$\}$,那末

$$(X;\cup,\cap,\sim,\circ)\cong(Z;\vee,\wedge,\sim,\circ).$$

这是因为有限集内的一个关系自然地对应于一个结合矩阵,这个对应是一对一在上的.

【例 7】 设 $X=\{$第三节例 5 中的 $T_\theta|\theta$ 实数$\}$,

$$Y=\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\middle|\ \theta\text{ 实数}\right\},\ Z=[0,2\pi),$$

"$\cdot$"是矩阵乘法, $\oplus_{2\pi}$ 是模 2π 加法,即对 z_1、$z_2\in Z$,有

$$z_1\oplus_{2\pi}z_2=z_1+z_2\text{ 被 }2\pi\text{ 除的余数}$$

$$=z\begin{pmatrix}\text{如果 }z_1+z_2=m2\pi+z\text{ 且}\\ m\text{ 整数, }z\in[0,2\pi)\end{pmatrix},$$

那末 $$(X;\circ)\cong(Y;\cdot)\cong(Z;\oplus_{2\pi}).$$

这是因为只要令 f、g 分别为$(X;\circ)$到$(Y;\cdot)$及$(Y;\cdot)$到$(Z;\oplus_{2\pi})$的由如下公式确定的映射:

$$f(T_\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

$$g\left(\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right)=\theta.$$

那末由第三节例 5 可知:

*) 示性函数 χ_A 的定义见习题 3·3 第 6 题.

$$f(T_\theta \circ T_\varphi)=\begin{pmatrix}\cos(\theta+\varphi) & \sin(\theta+\varphi)\\ -\sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$=f(T_\theta)\cdot f(T_\varphi);$$

$$g\left(\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\right)$$

$$=g\begin{pmatrix}\cos(\theta+\varphi) & \sin(\theta+\varphi)\\ -\sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi)\end{pmatrix}=\theta\oplus_{2\pi}\varphi$$

$$=g\left(\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right)\oplus_{2\pi} g\left(\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\right).$$

也就是说，f、g 是同态映射．但它们都是一对一在上的(为什么？请读者考虑)，所以都是同构映射．

如果 h 是$(X;\ \circledcirc)$到$(Y;\ \odot)$的满同态，X 有单位元 e，则 $h(e)$ 是 Y 的单位元．显然，如果$(X;\ \circledcirc)\cong(Y;\ \odot)$，则$\circledcirc$与 $\odot$ 的交换性、结合性、有无单位元、有无零元以及哪些元素有逆元等性质都是一样的．

由第一节我们知道：在 X 内有一个等价关系 $\boldsymbol{R}$，X 中的元素就可以按其是否等价分成很多类，从而得到一个商集 $X/\boldsymbol{R}$，它的每个元素是 X 的一个 $\boldsymbol{R}$ 等价类．如果在 X 内有一个运算 $\circledcirc$，那末能不能在商集 $X/\boldsymbol{R}$ 上的 $\boldsymbol{R}$ 等价类之间引出一个运算呢？

我们知道，每个 $\boldsymbol{R}$ 等价类都是由一些互相等价的元素组成的，其中每个元素都好比是这个等价类的一个代表，因此要把原来的运算 $\circledcirc$ 进一步定义到两个 $\boldsymbol{R}$ 等价类之间．例如说对 $\boldsymbol{R}$ 等价类 $[x]_R$ 与$[y]_R$，要定义运算的结果 $[x]_R\circledcirc[y]_R$ 仍为一个 $\boldsymbol{R}$ 等价类，很自然地应该在 $[x]_R$ 和$[y]_R$ 中各选一个

代表 x 和 $y(x, y\in X)$，然后定义

$$[x]_R\odot[y]_R=(x\odot y)\text{所在的等价类}$$
$$=[x\odot y]_R.$$

但是这样定义是否会引起矛盾呢？也就是说，如果在 $[x]_R$ 和 $[y]_R$ 中分别选另一个代表 x_1 和 y_1，那末等价类 $[x_1\odot y_1]_R$ 和 $[x\odot y]_R$ 是否一样呢？如果不一样，那说明上面的定义根本不合理，因为这样定义出的 $[x]_R\odot[y]_R$ 不是一个 $\boldsymbol{R}$ 等价类。于是为了保证能得到一个确定的 $\boldsymbol{R}$ 等价类，下述条件是必不可少的，这条件称为**等价关系 $\boldsymbol{R}$ 与运算 $\odot$ 的相容性条件**.

若 x 与 $x_1\boldsymbol{R}$ 等价，y 与 $y_1\boldsymbol{R}$ 等价，则

$$x\odot y \text{ 与 } x_1\odot y_1 \text{ 等价}.$$

这就是下面的

定义 3 集合 X 内的等价关系 $\boldsymbol{R}$ 称为与 X 内运算 $\odot$ **相容**，如果它满足：

$$\text{若 } x_1\boldsymbol{R}y_1,\ x_2\boldsymbol{R}y_2,\ \text{则}(x_1\odot x_2)\boldsymbol{R}(y_1\odot y_2). \tag{4.1}$$

如果等价关系 $\boldsymbol{R}$ 与 $\odot$ 相容，则称 R 为**代数系统 $(X;\odot)$ 上的等价关系**（而不止只是集合 X 上的等价关系）.

如果 $\boldsymbol{R}$ 是代数系统 $(X;\odot)$ 上的等价关系，那末可以在商集 $X/\boldsymbol{R}$ 上定义运算 $\odot$ 如下：

对 $[x]_R$、$[y]_R\in X/\boldsymbol{R}$，定义 $[x]_R\odot[y]_R=[x\odot y]_R$.

由于 $\boldsymbol{R}$ 与 $\odot$ 是相容的，所以如果 $[x]_R=[x_1]_R$，$[y]_R=[y_1]_R$，也就是 $x\boldsymbol{R}x_1$，$y\boldsymbol{R}y_1$，那末 $(x\odot y)\boldsymbol{R}(x_1\odot y_1)$，即 $[x_1\odot y_1]_R=[x\odot y]_R$. 因此

$$[x]_R\odot[y]_R=[x_1]_R\odot[y_1]_R.$$

这说明此种定义方法不会因为在 $\boldsymbol{R}$ 等价类 $[x]_R$ 及 $[y]_R$ 中选择不同代表而得到不同的结果而导致矛盾.

在 $X/\boldsymbol{R}$ 上定义运算 $\odot$ 后，代数系统 $(X/\boldsymbol{R};\odot)$ 称为

$(X;\circledcirc)$对于等价关系 $\boldsymbol{R}$ 的商代数系统.

定理 1 若 $\boldsymbol{R}$ 为$(X;\circledcirc)$上的等价关系,那末

$$(X;\circledcirc)\sim\text{商代数系统}(X/\boldsymbol{R};\circledcirc),$$

且此同态为满同态.

【证】 令 f_R 为 X 到 $X/\boldsymbol{R}$ 的如下映射:

$$f_R(x)=[x]_R\quad(\text{对任意的 } x\in X).$$

那末由 $X/\boldsymbol{R}$ 上的运算 $\circledcirc$ 的含义,有

$$f_R(x\circledcirc y)=[x\circledcirc y]_R=[x]_R\circledcirc[y]_R=f_R(x)\circledcirc f_R(y)$$

(对任意的 $x,y\in X$),

这说明 f_R 是满同态映射. 因此$(X;\circledcirc)$与$(X/\boldsymbol{R};\circledcirc)$是满同态. 】

定义 4 若 $\boldsymbol{R}$ 是$(X;\circledcirc)$上的等价关系,则把$(X;\circledcirc)$到商代数系统$(X/\boldsymbol{R};\circledcirc)$上的满同态映射 $f_R(f_R(x)=[x]_R)$称为 X 到 $X/\boldsymbol{R}$ 的自然同态映射.

下面的定理说明从一个 X 到 Y 的满同态可以得到 X 的某个商系统到 Y 的一个同构.

定理 2 如果$(X;\circledcirc)$到$(Y;\odot)$有一个满同态映射 h, 则 X 上可以定义一个等价关系 $\boldsymbol{h}$:

$$x_1\boldsymbol{h}x_2\ \text{当且仅当}\ h(x_1)=h(x_2),\tag{4.2}$$

(即把在 X 中有相同象点的元素看成一个类), 使得 $\boldsymbol{h}$ 是$(X;\circledcirc)$上的等价关系,而且有

$$(X/\boldsymbol{h};\circledcirc)\cong(Y;\odot);$$

$$h=g\circ f_h,\tag{4.3}$$

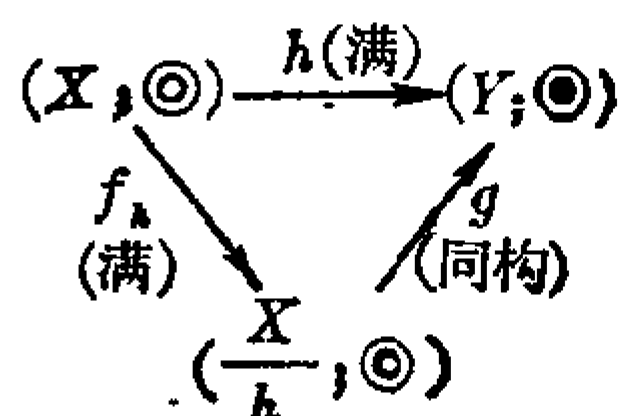


图 3-7

其中 g 为$(X/\boldsymbol{h};\circledcirc)$到$(Y;\odot)$的同构映射.

【证】 显然关系 $\boldsymbol{h}$ 是返身、对称且传递的, 所以它是等价关系.

如果 $x_1\boldsymbol{h}x_2$, $y_1\boldsymbol{h}y_2$, 这就是说

$$h(x_1)=h(x_2),\ h(y_1)=h(y_2),$$

由于 h 是同态映射，所以

$$h(x_1\circledcirc y_1)=h(x_1)\odot h(y_1)=h(x_2)\odot h(y_2)$$
$$=h(x_2\circledcirc y_2).$$

也就是 $(x_1\circledcirc y_1)\boldsymbol{h}(x_2\circledcirc y_2)$. 因此按定义 3, 等价关系 $\boldsymbol{h}$ 与 $\circledcirc$ 相容，所以 $\boldsymbol{h}$ 是 $(X;\ \circledcirc)$ 上的等价关系.

现在定义 $(X/\boldsymbol{h};\ \circledcirc)$ 到 $(Y;\ \odot)$ 的映射 g:

$$g([x]_h)=h(x),$$

即把 $\boldsymbol{h}$ 等价类 $[x]_h$ 中代表元素 x 在 h 下的同态象作为 $[x]_h$ 的象. 由于对同一 $\boldsymbol{h}$ 类中的元素 h 的象 $h(x)$ 都是一样的，因此这定义不会因取不同的代表元而引起矛盾.

由于 $h(x)$ 是在上的映射，因此对任意的 $z\in Y$, 必定存在 $x\in X$, 使 $h(x)=z$, 那末按 g 的定义就有 $g([x]_h)=z$, 所以 g 是在上的.

又由于 $\boldsymbol{h}$ 与 $\circledcirc$ 的相容性及 h 是同态映射，我们有

$$g([x]_h\circledcirc[y]_h)=g([x\circledcirc y]_h)=h(x\circledcirc y)$$
$$=h(x)\odot h(y)=g([x]_h)\odot g([y]_h).$$

所以 g 是 $(X/\boldsymbol{h};\ \circledcirc)$ 到 $(Y;\ \odot)$ 的同态映射.

如果对 $[x]_h$、$[y]_h\in X/\boldsymbol{h}$, 有

$$g([x]_h)=g([y]_h),$$

那末按 g 的定义，上面的等式就是

$$h(x)=h(y).$$

这说明 x 与 y 属于同一 $\boldsymbol{h}$ 等价类，即 $[x]_h=[y]_h$. 因此 g 是一对一的.

综上所证，g 是 $(X/\boldsymbol{h};\ \circledcirc)$ 到 $(Y;\ \odot)$ 的同构映射，而且

$$h(x)=g([x]_h)=g(f_h(x))=(g\circ f_h)(x).\ ▌$$

定义 5 若$(X;\circledcirc)$是代数系统，$Y\subset X$，而且若$\circledcirc$也是Y内的运算(Y内元素经$\circledcirc$运算后仍在Y内)，则称代数系统$(Y;\circledcirc)$为$(X;\circledcirc)$的子代数系统.

定义 6 设$(X;\circledcirc)$、$(Y;\odot)$为代数系统. 在笛卡儿乘积$X\times Y$上可定义运算$\circledcirc\times\odot$如下:

对(x_1, y_1)、$(x_2, y_2)\in X\times Y$，有

$$(x_1, y_1)\circledcirc\times\odot(x_2, y_2)=(x_1\circledcirc x_2, y_1\odot y_2).$$

于是$(X\times Y;\circledcirc\times\odot)$也是代数系统，叫做$(X;\circledcirc)$与$(Y;\odot)$的直接积；而$(X;\circledcirc)$与$(Y;\odot)$都叫做$(X\times Y;\circledcirc\times\odot)$的因子代数系统.

代数系统的形式是多种多样的，集合X可以任意给，X内的运算$\circledcirc$的性质也可以很不相同.

归纳这部分要点

代数系统$(X;\circledcirc)$与集合X很不一样，它是在集合X上定义了运算$\circledcirc$后的总体. 在同一个集合上定义了不同的运算$\circledcirc$及$\odot$，那末代数系统$(X;\circledcirc)$与代数系统$(X;\odot)$也不是一样的；还可以考虑代数系统$(X;\circledcirc,\odot)$，它与前两个是不同的.

两个同构的代数系统实质上是一样的；两个满同态的代数系统也差不多一样，在划分等价类后(商系统)就同构了.

要注意集合X上的等价关系与代数系统$(X;\circledcirc)$上的等价关系的区别，后者要求运算$\circledcirc$与等价关系的相容性.

习 题 3·4(1)

1. 证明：若$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{S}$都是$(X;\circledcirc)$上的等价关系，则$\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{S}$也是$(X;\circledcirc)$上的等价关系.
2. 证明：若h是$(X;\circledcirc)$到$(Y;\odot)$的同态，$(X_1;\circledcirc)$是$(X;\circledcirc)$的一

个子代数系统，则$(h(X_1), \odot)$是$(Y; \odot)$的子代数系统，其中

$$h(X_1)=\{h(x) \mid x\in X_1\}.$$

3. 证明：若h与g分别是$(X; \circledcirc)$到$(Y; \circledcirc)$和$(Y; \circledcirc)$到$(Z; *)$的同态映射，则$g\circ h$是$(X; \circledcirc)$到$(Z; *)$的同态映射。

4. 证明：非负整数集Z上的等价关系$\overset{(\mathrm{mod}\, p)}{\equiv}$与通常的加法$(+)$和乘法$(\times)$分别都相容[因而商系统$(Z/\equiv(\mathrm{mod}\, p); +)$与$(Z/\equiv(\mathrm{mod}\, p); \times)$分别是代数系统，以后把它们简化为$(Z_p; \oplus_p)$, $(Z_p; \otimes_p)$，并把$\oplus_p$, $\otimes_p$分别称为模p加法与模p乘法]。

4.2 半群

最简单的代数系统之一就是半群．它只有一个运算，但是要求这运算是结合的，这就是

定义1 若X非空，且X内的运算$\circledcirc$是结合的，则称代数系统$(X; \circledcirc)$为*半群*。

【例1】 (1) 设N为自然数全体，R为实数全体，K为复数全体，E为全体正偶数，则$(N; +)$, $(R; +)$, $(K; +)$都是以0为单位元的半群；$(N; \times)$, $(R; \times)$, $(K; \times)$都是以1为单位元的半群；$(E; +)$, $(E; \times)$是没有单位元的半群(这里"$+$"、"$\times$"分别是普通的加和乘)。

(2) 设$Z_p=\{0, 1, \cdots, p-1\}$; $\oplus_p$是模p加法，$\otimes_p$是模p乘法，则$(Z_p; \oplus_p)$, $(Z_p; \otimes_p)$都是半群，它们分别有单位元0及1(其符号参见习题3·4(1)第4题)。

(3) 设X是集合E的全体子集，则$(X; \cup)$, $(X; \cap)$都是半群，它们分别有单位元$\emptyset$及E。

(4) 设X为n阶矩阵的全体，"$\cdot$"为矩阵乘法，则$(X; \cdot)$, $(X; +)$都是半群，它们分别有单位元——单位矩阵I及零矩阵O．而$(X; \vee)$, $(X; \wedge)$都是没有单位的半群。

(5) 设 X 为 n 阶结合矩阵的全体，则 $(X; \vee)$，$(X; \wedge)$，$(X; \circ)$ 都是半群，它们分别以零矩阵、元素全为1的矩阵及单位矩阵为单位元.

(6) 设 X 是集合 E 内映射的全体，则 $(X; \circ)$ 是半群，单位元为恒等映射.

(7) 设 X 是集合 E 内的关系的全体，则 $(X; \cup)$，$(X; \cap)$，$(X; \circ)$ 都是半群，它们分别有单位元：空关系 $\emptyset$，满关系 $X\times X$ 及恒等关系 $\{(x, x)\,|\,x\in X\}$.

【例 2】 设 V 是一些符号的集合，我们称它为"字母表". 在 V 中任取 m 个符号(可以重复)按次序排在一起，叫做一个长度为 m 的"字". 令一切"字"组成的集合为 V^+. 并令 $V^* = V^+\cup\{\emptyset\}$. 在 V^* 中定义运算"$\circ$"(称为"连接运算")如下：对 $\alpha, \beta\in V^*$，有

$$\alpha\circ\beta=\alpha\beta\ (\text{在“字”}\ \alpha\ \text{后接“字”}\beta),$$

则运算"$\circ$"是结合的. 因此 $(V^*; \circ)$ 是半群，它以 $\emptyset$(空字)为单位元；$(V^+; \circ)$ 也是半群，但它没有单位元.

*【例 3】 设 A 是一个有限集合：

$$A=\{a_1, \cdots, a_n\},$$

我们把 A 的任意一个划分 $P(P=\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}, m\geqslant 1, A_i\cap A_j=\phi(i\neq j), A_1\cup\cdots\cup A_m=A)$ 当作一个元素，把所有这样元素的全体组成的集合记为 X. X 中有两个特殊的元素：一个是最粗的划分，即 A 只分成一个集合，就是它自己，这个划分记成 R，即 $R=\{A\}$；另一个是最细的划分，即把 A 分成每个集合只有一个元素，这个划分记成 F，即 $F=\{\{a_1\}, \{a_2\}, \cdots, \{a_n\}\}$.

例如，若 $A=\{a, b, c\}$，则 X 中除了元素 R 和 F 外还有三个元素：$P_1=\{\{a\}, \{b, c\}\}$，$P_2=\{\{b\}, \{a, c\}\}$，$P_3=\{\{c\}, \{a, b\}\}$.

在 X 上定义两种运算：

1) 两个划分 P 与 Q 的积：$P\times Q$

设 $P=\{A_1, \cdots, A_m\}$, $Q=\{B_1, \cdots, B_l\}$, 在 $A_1\cap B_1, \cdots, A_m\cap B_l$ 中去掉所有的空集,剩下的就成为 A 的一个划分,这个划分就定义为积 $P\times Q$. 读者容易验证运算"×"是满足交换与结合的, 而且满足: 对任意 $P\in X$, 有

$$P\times R=P \quad P\times F=F.$$

代数系统(X; ×) 就是以 R 为单位元的一个半群. 这里 F 是(X; ×)的零元.

2) 两个划分 P 与 Q 之和: $P+Q$

对任意 $P\in X$, 先定义

$$P+R=R.$$

对其它情形,即 $P\neq R$, $Q\neq R$ 时,定义 $P+Q$ 为 A 的如下的一个划分:

任意一个 A 的子集 D 属于这个划分当且仅当同时满足下列三个条件: 1° $D\neq A$; 2° D 既是划分 $P(=\{A_1, \cdots, A_m\})$ 中某些(一个或多个) A_i 之并,又是划分 $Q(=\{B_1, \cdots, B_l\})$ 中某些(一个或多个)B_j 之并; 3° 不存在 D 的一个真子集,它既是某些 A_i 之并又是某些 B_j 之并. 这样的运算"+"是满足交换与结合的,而且

$$P+R=R, \quad P+F=P.$$

代数系统(X; +)就是以 F 为单位元的一个半群, R 是它的零元.

既然半群也是一个代数系统, 那末在前面讨论的与代数系统有关的种种概念和结论在半群情况也是完全适用的. 半群的商代数系统叫**商半群**.

归纳来说: 半群是一种简单的代数系统,它要求有一个结合的运算, 但未必一定有单位元. 半群是很多较复杂的代数系统的基础.

习 题 3·4(2)

1. 证明: 在一个有单位元的半群中,全体左可逆元素构成一个有单位元的子半群.
2. 如果半群(X; ⊙)中的元素 c 满足: 对任意的 $x, y\in X$, 有 $c\odot x=c\odot y\Rightarrow x=y$,

则称 c 为半群的*左消去元*. 求证$(X;\ \circledcirc)$中全体左消去元要么是空集,要么构成一个子半群.

3. 证明: 由代数系统$(X;\ \circledcirc)$到它自己的自同态全体构成一个有单位元的半群.

4.3 群、环、域

比半群的条件要求更多一些的代数系统称为群, 即

定义 1 若半群$(X;\ \circledcirc)$有单位元, 而且 X 中的每一个元素都有逆元,则称$(X;\ \circledcirc)$为*群*. 如果$(X;\ \circledcirc)$是群, 而且$\circledcirc$是交换的,则称$(X;\ \circledcirc)$为*交换群*,或称*阿贝尔群*; 如果$(X;\ \circledcirc)$是群,且 X 是有限集,则称$(X;\ \circledcirc)$为*有限群*.

有限群中有一类特别重要的群, 就是下面例子中的置换群.

【例 1】 由第三节的例 6 可知, 对于一个具有 n 个元素的有限集 $E=\{a_1,\ \cdots,\ a_n\}$而言, E 内的一个一对一在上的映射就叫做一个*置换*, 更确切地说, 是一个具有 n 个元素的置换. 一个置换可以写成置换表的形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \quad (i_1,\ \cdots,\ i_n \text{是} 1,\ \cdots,\ n \text{的一种排法}).$$

如第三节例 6 所指出的,两个置换的运算"$\circ$"可以定义两个置换表的一种乘法,运算"$\circ$"是结合的. 于是一切置换的全体组成一个群(逆映射都是存在的), 叫做 n *阶置换群*. 它是不交换群. 也就是说

$X=\{$全体 n 阶置换表(上下两行对应关系相同的置换表被认为是同一个元素)$\}$.

两个置换表的乘法"$\circ$"按它们作为映射的运算"$\circ$"定义,那末 n 阶置换群也可以理解为群$(X;\ \circ)$.

【例 2】 如果在 n 个元素的有限群$(X;\ \circledcirc)$中，存在一个元素 $a\in X$，使

$$X=\{e,\ a,\ a^2,\ \cdots,\ a^{n-1}\},$$

则称$(X;\ \circledcirc)$为 n 阶循环群，称 a 为它的生成元．例如$(Z_p,\ \oplus_p)$是 p 阶循环群，1 就是它的生成元；如果 p 是质数，则任意一个元素都是它的生成元．

群既然也是一种特殊的代数系统，因此也就有群到群的同态和同构概念，请读者自己叙述．

定义 2 如果$(X_1;\ \circledcirc)$是群$(X;\ \circledcirc)$的子代数系统且本身也是群，则称$(X_1;\ \circledcirc)$为群$(X;\ \circledcirc)$的子群．

定义 3 设 h 是群$(X;\ \circledcirc)$到群$(Y;\ \odot)$的同态映射，则

$$\{x|x\in X,\ h(x)=e_Y,\ (e_Y \text{是}(Y;\ \odot)\text{的单位元})\}$$

称为同态 h 的核，记为 $\ker(h)$。

注 h 的核一定不会是空集．这是因为若 e_X 是$(X;\ \circledcirc)$中的单位元，那末对于任意的 $x\in X$，有

$$h(x)=h(x\circledcirc e_X)=h(x)\odot h(e_X).$$

又因$(Y;\ \odot)$是群，所以 $h(x)^{-1}$ 是存在的，两边乘以 $h(x)^{-1}$ 后得到 $e_Y=h(e_X)$．所以至少有 $e_X\in\ker(h)$．

定理 1 设群$(X;\ \circledcirc)$到群$(Y;\ \odot)$的同态映射 h 的核为 $\ker(h)$，则$(\ker(h);\ \circledcirc)$是$(X;\ \circledcirc)$的子群．

【证】 设任给 $x,\ y\in\ker(h)$，那末

$$h(x\circledcirc y)=h(x)\odot h(y)=e_Y\odot e_Y=e_Y.$$

所以 $x\circledcirc y$ 也属于 $\ker(h)$．

再根据上面的注，$e_X\in\ker(h)$，故对任给的 $x\in\ker(h)$，有

$$\begin{aligned}h(x^{-1})&=h(x^{-1})\odot e_Y=h(x^{-1})\odot h(x)\\&=h(x^{-1}\circledcirc x)=h(e_X)=e_Y.\end{aligned}$$

故 $x^{-1}\in\ker(h)$．说明$(\ker(h);\ \circledcirc)$是群．但$(\ker(h);\ \circledcirc)$

显然是$(X;\ \circledcirc)$的子代数系统，故是它的子群. ▌

下面介绍一个定理，说明置换群在有限群论中具有重要的地位.

定理2 有n个元素的有限群必同构于n阶置换群的一个子群.

【证】 设$(X;\ \circledcirc)$为有n个元素的群. 任取$x\in X$，定义一个X内的映射f_x如下：对任意$a\in X$，有

$$f_x(a)=x\circledcirc a.$$

于是f_x是X内的在上映射，这是因为，任给$b\in X$，有

$$f_x(x^{-1}\circledcirc b)=x\circledcirc(x^{-1}\circledcirc b)=b.$$

即b是$x^{-1}\circledcirc b$的f_x象；另一方面f_x也是一对一的，这是因为，如果对a、$b\in X$，使

$$f_x(a)=f_x(b)\quad(\text{即 } x\circledcirc a=x\circledcirc b)$$

在等式两边的左端施行运算$\circledcirc$以x^{-1}，就得到$a=b$.

因此f_x是一个置换(一对一在上的映射). 对任意的$x\in X$，令h是X由到一些置换组成的集合上的映射：

$$h(x)=f_x,$$

那末，对x、$y\in X$及任意的$a\in X$，有

$$\begin{aligned}f_{x\circledcirc y}(a)&=(x\circledcirc y)\circledcirc a=x\circledcirc(y\circledcirc a)\\&=f_x(y\circledcirc a)=f_x(f_y(a))\\&=(f_x\circ f_y)(a).\end{aligned}$$

因为a是任意的，故上面的等式就是

$$h(x\circledcirc y)=h(x)\circ h(y).$$

令$Y=\{h(x)\mid x\in X\}$，于是h是X到Y的在上映射，而且是一对一的，这是因为，如果对x、$y\in X$有$h(x)=h(y)$，那末由映射h的定义$f_x=f_y$，当然更有$f_x(a)=f_y(a)$，也就是$x\circledcirc a=y\circledcirc a$，因此

$$x=(x\circledcirc a)\circledcirc a^{-1}=(y\circledcirc a)\circledcirc a^{-1}=y.$$

所以 h 是一对一的映射.

下面还要证明 $(Y;\ \circ)$ 是一个群: 首先, 显然它是一个半群. 又如果 e 是 X 中的单位元, 则 f_e 满足

$$f_e(a)=e\circledcirc a=a.$$

因此 f_e 是恒等映射. 但 $f_e\circ f_x=f_{e\circledcirc x}=f_x$, 故 f_e 是半群 $(Y;\ \circ)$ 的单位元. 又由于

$$f_{x^{-1}}\circ f_x=f_{x^{-1}\circledcirc x}=f_e.$$

这说明 f_x 有逆元 $f_{x^{-1}}$. 因此 $(Y;\ \circ)$ 是群. 所以是 n 阶置换群的子群. 既然 $h(x)$ 是 $(X;\ \circledcirc)$ 到 $(Y;\ \circ)$ 的一对一在上的映射, 而且前面已证明它满足 $h(x\circledcirc y)=h(x)\circ h(y)$. 所以 $h(x)$ 是同构映射, 故

$$(X;\ \circledcirc)\cong(Y;\ \circ).$$

而 $(Y;\ \circ)$ 是 n 阶置换群的子群. ▌

一个具有 n 个元素的有限群叫做 n 阶有限群. 下面的定理要说明: 一个 n 阶有限群如果有子群, 那末子群的阶数必能整除 n.

我们先把群的元素按给定的子群分成等价类. 若 $(G;\ \circledcirc)$ 是群, $(H;\ \circledcirc)$ 是它的子群. 我们在 G 中引入一个关系 $\boldsymbol{H}$: 对 $a,\ b\in G$,

$$a\boldsymbol{H}b \text{ 当且仅当存在 } h\in H,\ \text{使 } a=b\circledcirc h.$$

这个条件也可以叙述成:

$$a\boldsymbol{H}b \text{ 当且仅当 } b^{-1}\circledcirc a\in H.$$

这样定义的关系是一个等价关系, 这是因为

(1) $a^{-1}\circledcirc a=e\in H$ ($(H;\ \circledcirc)$ 为子群) 推出 $a\boldsymbol{H}a$;

(2) 若 $b^{-1}\circledcirc a\in H$, 则 $a^{-1}\circledcirc b=(b^{-1}\circledcirc a)^{-1}\in H$, 即由 $a\boldsymbol{H}b$ 推得 $b\boldsymbol{H}a$;

(3) 若 $b^{-1}\odot a\in H$, $c^{-1}\odot b\in H$，则因为$(H;\odot)$也是群，故 $c^{-1}\odot a=(c^{-1}\odot b)\odot(b^{-1}\odot a)\in H$，因此由 $a\boldsymbol{H}b$、$b\boldsymbol{H}c$ 得到 $a\boldsymbol{H}c$.

既然 $\boldsymbol{H}$ 是 G 内的等价关系，故就可以把 G 的元素按等价关系 $\boldsymbol{H}$ 分成等价类. 对 $a\in G$，所在的等价类为

$$[a]_H=\{x\mid x\in G, x\boldsymbol{H}a\}=\{a\odot h\mid h\in H\}.$$

我们把$\{a\odot h\mid h\in H\}$简记为 aH，称为子群 H 在 G 中的左陪集，这里 a 是左陪集 aH 的代表元.

G 对等价关系 $\boldsymbol{H}$ 的商集合 G/H 的所有元素就是所有的左陪集.

现在我们就能证明

定理 3(拉格朗日定理) 有限群的阶数可被它的子群的阶数所整除.

【证】 设$(G;\odot)$有 n 个元素，它的子群$(H;\odot)$有 m 个元素，G 的元素可按上面的 $\boldsymbol{H}$ 等价类分成左陪集，而这些左陪集中的任意两个要么不相交；要么完全重合. 而且每一个左陪集 aH 都与 H 有相同数目的元素. 因此，G 可写成一些两两不相交的左陪集之并：$G=a_1H+\cdots+a_kH$. 而等式右边集合的元素的数目应为 km，所以 $n=km$. ▌

下面一个问题是："商集合 G/H 在运算 $\odot$ 下，是否也是一个群？"这只需要检查 G 上的等价关系 $\boldsymbol{H}$ 是不是$(G;\odot)$上的等价关系，即：等价关系是否和运算 $\odot$ 相容. 如果相容，那末由本节 4·1 定理 2 就可知道$(G/H;\odot)$是群.

但是一般地说，$\boldsymbol{H}$ 并不一定与 $\odot$ 相容. 什么情况下相容呢？这就需要对子群$(H;\odot)$加以一定的条件. 现在我们就从相容性的要求来进行分析：

要求 $\boldsymbol{H}$ 与 $\odot$ 相容也就是对任意的 a_1, a_2, b_1, b_2, 要

求有

$$a_1 H a_2,\ b_1 H b_2 \Rightarrow (a_1 \odot b_1) H (a_2 \odot b_2).$$

这就是说，要由 $a_2^{-1}\odot a_1 = h_1$, $b_2^{-1}\odot b_1 = h_2$ $(h_1, h_2 \in H)$ 推出 $(a_2\odot b_2)^{-1}\odot(a_1\odot b_1)\in H$.

但是

$$\begin{aligned}(a_2\odot b_2)^{-1}\odot(a_1\odot b_1) &= b_2^{-1}\odot a_2^{-1}\odot a_1\odot b_1\\ &= b_2^{-1}\odot(a_2^{-1}\odot a_1)\odot(b_1\odot b_2^{-1})\odot b_2\\ &= b_2^{-1}\odot h_1\odot h_2^{-1}\odot b_2\\ &= b_2^{-1}\odot h\odot b_2 \quad (h = h_1\odot h_2^{-1}\in H).\end{aligned}$$

因此相容性就是要求 $b_2^{-1}\odot h\odot b_2\in H$.

又因为 h_1、h_2 可以在 H 中任意取，所以 h 也是可以取遍 H 中的任意一个元素的。另一方面，b_2 也可以取 G 中任意一个元素，所以相容性条件又可写成：

对一切 $b\in G$，有 $\{b^{-1}\odot h\odot b \mid h\in H\}\subset H$.

我们进一步说明这个条件和下述条件是一样的：

对一切 $a\in G$，有 $\{a^{-1}\odot h\odot a \mid h\in H\} = H$.

从第二个条件显然能推出第一个条件(取 $a=b$)。现在我们证明：从第一个条件也能推出第二个条件.

对于任意的 $h'\in H$ 及任意的 $b\in G$，由第一个条件可知：存在 $h_1\in H$，使 $b^{-1}\odot h'\odot b = h_1$，所以 $h' = b\odot h_1\odot b^{-1}$. 取 $a = b^{-1}$，那末 $h' = a^{-1}\odot h_1\odot a\in\{a^{-1}\odot h\odot a \mid h\in H\}$，又因为 h' 在 H 是任取的，因而有

$$H\subset\{a^{-1}\odot h\odot a \mid h\in H\}.$$

这就由第一个条件推出了第二个条件.

我们简记

$$a^{-1}Ha = \{a^{-1}\odot h\odot a \mid h\in H\}.$$

那末第二个条件可简写为

$$\text{对一切 } a\in G,\ \text{有 } a^{-1}Ha=H. \tag{4.4}$$

如果我们令 $\boldsymbol{H}'$ 为$(G;\ ⊚)$内的另一个关系：$a\boldsymbol{H}'b$ 定义为存在 $h\in H$，使 $a=h⊚b$，那末可以证明 $\boldsymbol{H}'$ 也是 G 上等价关系，其等价类为

$$Ha=\{h⊚a\,|\,h\in H\},$$

称为以 a 为代表元的*右陪集*．那末条件(4.4)又可写成

$$\text{对一切 } a\in G,\ \text{有 } aH=Ha. \tag{*}$$

意即以 a 为代表元的左陪集与右陪集是一样的．

我们给满足条件(4.4)的子群$(H;\ ⊚)$下一个定义：

定义 4 如果群$(G;\ ⊚)$的子群$(H;\ ⊚)$满足条件(*)，则称为*正规子群*．

于是：当且仅当子群为正规时，它所定义的等价关系 $\boldsymbol{H}$ 才与⊚是相容的．

显然，交换群的子群都是正规子群．

由关于一般代数系统的商代数系统的讨论，我们可以得到：若$(H;\ ⊚)$是$(G;\ ⊚)$的正规子群，则$(G/H;\ ⊚)$仍是一个群，称为$(G;\ ⊚)$关于$(H;\ ⊚)$的*商群*．

定理 4（同构基本定理） 设群$(X;\ ⊚)$到群$(Y;\ ⊙)$有同态映射 h，则其核 $\ker(h)$是$(X;\ ⊚)$的正规子群，而且其商群$(X/\ker(h);\ ⊚)\cong(h(X);\ ⊙)$，这里$(h(X);\ ⊚)$是$(Y;\ ⊙)$的子群，$h(X)=\{y\,|\,y=h(x),\ x\in X\}$．

【证】 首先我们指出群$(X;\ ⊚)$的 h 同态象$(h(X);\ ⊙)$必是$(Y;\ ⊙)$的子群，而且若 X 的单位元是 e_X，则 $h(e_X)$就是 Y 的单位元 e_Y，同时 $h(x)$的逆元为 $h(x^{-1})$．这些事实作为练习，请读者自证．

其次，我们已知道$(\ker(h);\ ⊚)$是$(X;\ ⊚)$的子群．我们要说明：对于 x_1、$x_2\in X$ 而言，$h(x_1)=h(x_2)$与 x_1 和 x_2 属于

$\ker(h)$ 的同一个左陪集是一样的．这是因为 $h(x_1)=h(x_2)$ 等同于 $h(x_2)^{-1}\odot h(x_1)=e_Y$，而上式的右方等于

$$h(x_2^{-1})\odot h(x_1)=h(x_2^{-1}\circledcirc x_1).$$

因此，$h(x_1)=h(x_2)$ 等同于 $h(x_2^{-1}\circledcirc x_1)=e_Y$，也即等同于 $x_2^{-1}\circledcirc x_1\in\ker(h)$．这就是说，$x_1$ 与 x_2 关于子群 $\ker(h)$ 属于同一个等价类——左陪集．

但根据 4·1 定理 2 知，由 $h(x_1)=h(x_2)$ 可以引出一个 $(X;\circledcirc)$ 内的等价关系 $\boldsymbol{h}$．上面的事实正说明了按子群 $\ker(h)$ 划分左陪集的等价关系与等价关系 $\boldsymbol{h}$ 是一样的(因为 $\boldsymbol{h}$ 与 $\circledcirc$ 相容)，因此按子群划分左陪集的等价关系也应与 $\circledcirc$ 相容．所以 $(\ker(h);\ \circledcirc)$ 是 $(X;\ \circledcirc)$ 的正规子群．于是 $(X/\ker(h);\ \circledcirc)$ 是商群．

另一方面既然 $X/\ker(h)$ 的等价类与 $X/\boldsymbol{h}$ 的等价类完全一样，那末由本节 4·1 定理 2 可知：

商群 $(X/\ker(h);\ \circledcirc)=(X/\boldsymbol{h};\ \circledcirc)\cong(h(X);\ \odot)$．∎

对于任意两个群 $(X;\ \circledcirc)$ 与 $(Y;\ \odot)$，作为代数系统，可以有直接积 $(X\times Y;\ \circledcirc\times\odot)$．请读者自己验证它也是一个群．

对于具有两种运算的代数系统，有

定义 5 代数系统 $(X;\ \oplus,\ \circledcirc)$ 如果满足：

(1) $(X;\ \oplus)$ 是交换群；

(2) $(X;\ \circledcirc)$ 是半群；

(3) 运算 $\circledcirc$ 对运算 $\oplus$ 是分配的．

则称为环．

【例 3】 (1) 整数全体，实数全体，有理数全体，偶数全体，复数全体等，在通常运算加法(即 $\oplus=+$)和乘法(即 $\odot=\times$)下都成为环．

(2) 设 $X=\lambda$ 的整系数多项式全体 $=\{f(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n \mid n$ 为正整数；$a_0, a_1, \cdots, a_n$ 均为整数$\}$，则$(X;+,\times)$是环.

【例 4】 (1) 设 $X=n$ 阶矩阵全体，按矩阵的加法和乘法，则$(X;+,\cdot)$是环.

(2) 若 $X=$集合 E 内的全体关系，则$(X;\cup,\circ)$是环.

在一个环$(X;\oplus,\odot)$中，运算 $\oplus$ 类似于普通的加法；运算 $\odot$ 当可交换时，类似于普通的乘法. 但是，在 $\odot$ 不可交换时，须要特别注意次序，在例 4 中，各个环中的 $\odot$ 分别为"·"和"∘"，它们都是不可交换的.

我们把环$(X;\oplus,\odot)$中运算 $\oplus$ 的单位元记成 0；把 X 中的元素 a 关于 $\oplus$ 的逆元记成 $-a$，则 0 就是半群$(X;\odot)$的零元. 这是因为对任意的 a、$b\in X$，有

$$\begin{aligned}0&=(a\odot b)\oplus[-(a\odot b)]=[a\odot(b\oplus 0)]\\&\oplus[-(a\odot b)]=(a\odot b)\oplus(a\odot 0)\\&\oplus[-(a\odot b)]=(a\odot b)\oplus[-(a\odot b)]\\&\oplus(a\odot 0)=0\oplus(a\odot 0)=a\odot 0.\end{aligned}$$

同理可证 $0\odot a=0$. 由第三节定义 5 可知，0 是运算 $\odot$ 的零元.

我们称 0 为*环的零元*.

用类似的方法还可以证明下列等式

$$a\odot(-b)=-(a\odot b)=(-a)\odot b;$$

$$(-a)\odot(-b)=a\odot b.$$

若环$(X;\oplus,\odot)$的运算 $\odot$ 有单位元，则把这单位元记为 1，称为*环的单位元*. 如果环有单位元，而且对 $a(\in X)$关于运算 $\odot$ 有逆元，则把这个逆元记成 a^{-1}.

关于 $\odot$ 运算满足交换性的环叫做*交换环*.

如果$(X;\oplus,\odot)$是环，且$\odot$也是集合$X-\{0\}$内的运算，则称$(X;\oplus,\odot)$为没有零因子的环.

有单位元且没有零因子的交换环称为整域.

定义 6 若$(X;\oplus,\odot)$是一个交换环，且X中多于一个元素，同时$(X-\{0\},\odot)$是一个群，则称$(X;\oplus,\odot)$为域.

【例 5】 (1) 全体有理数，全体实数，全体复数在普通的加法和乘法下分别都是域.

(2) 若$X=\left\{\dfrac{f(\lambda)}{g(\lambda)}\middle| f,\ g\text{都是}\lambda\text{的实系数多项式}\right\}$，则$(X;+,\cdot)$是一个域.

环、域都是特殊的代数系统，因此对于环、域同样也有子环(既是环又是子代数系统)、子域、同态、同构等概念. 类似地还可以考虑商环、商域以及环的笛卡儿乘积、域的笛卡儿乘积等.

归纳这部分要点

群是最常见的代数系统，应用也最广泛. 一般群并不具有交换性，这需要特别注意.

正规子群的概念很重要，是关于群同构定理的基础.

环、域中的运算$\odot$一般也不具有交换性，当$\odot$具有交换性时，就得到交换环、交换域. 交换环的性质有点与全体整数类似，交换域的性质有点与全体实数类似，但并不一样.

习　题　3·4(3)

1. 求证：一个半群中全体可逆元素构成一个子群.
2. 写出1阶、2阶、3阶置换群的所有元素，并指出这些元素的逆元素.
3. 证明：群$(G;\odot)$是交换群的充要条件为：
   对于任意的$x,\ y\in G$，均有$(x\odot y)^2=x^2\odot y^2$，$(x\circ x=x^2)$.

4. 证明：$(Z_5-\{0\};\otimes_5)$是群，并填写群$(Z_5-\{0\};\otimes_5)$的"乘"法表(即：要指出对于任意的x、$y\in Z_5-\{0\}$，$x\otimes_5 y$是什么?)。

5. 试说明$(Z_4-\{0\};\ \otimes_4)$不是群。

6. 证明：如果$(X;\ \odot)$为阿贝尔群(交换群)，则对于任意的$x,\ y\in X$，有$(x\odot y)^n=x^n\odot y^n$。

7. 填写3阶置换群的"乘"法表(即要指出对任意的x、$y\in 3$阶置换群$(P_3;\ \cdot)$，$x\cdot y$是什么?)。

8. 设$(P_2;\ \cdot)$，$(P_3;\ \cdot)$分别是2阶和3阶置换群，求证$(P_2\times P_3;\ \cdot\times\cdot)$同构于5阶置换群的一个子群。

9. 设5阶置换群中下列元素为

$$x=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&4&5\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&5&4\end{pmatrix},$$

$$z=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&1&2\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&5&4\end{pmatrix}.$$

试求：$x\cdot y$，$y\cdot x$，x^2，w^{-1}，$x\cdot y\cdot z$；并解方程$x\cdot\theta=y$(即求未知数θ)。

10. 证明：复数集$\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$在通常乘法下是一个循环群，而且它与$\{Z_5-\{0\},\ \otimes_5\}$同构。

11. 证明：$(\{1,\ 4,\ 13,\ 16\};\ \otimes_{17})$是$(Z_{17}-\{0\};\ \otimes_{17})$的子群，而且是一个循环群。

12. 试写出$(Z_5,\ \oplus_5)$和$(Z_5-\{0\},\ \otimes_5)$的一切子群。

13. 在群$(G;\ \odot)$中任取一个元素a，则可得到一个$(G;\ \odot)$到$(G;\ \odot)$的映射h_a：

$$h_a(x)=a\odot x\odot a^{-1}\quad(\text{任意 } x\in G).$$

试证明：h_a是$(G;\ \odot)$的自同构。并指出h_e，$h_a\circ h_b$，$h_{a^{-1}}$各等于什么？在a固定时，证明$h_a(x)$的不变元全体$\{x|h_a(x)=x\}$是$(G;\ \odot)$的一个子群。并且全体这样的自同态$(\{h_a|a\in G\};\ \circ)$组成一个群。

14. 设I是全体整数，定义

$$x\oplus y=x+y-1;$$
$$x\odot y=x+y-xy.$$

求证$(I;\ \oplus,\ \odot)$是有单位元的交换环。

15. 求证(Z_5; $\oplus_5$, $\otimes_5$)是域；但(Z_6; $\oplus_6$, $\otimes_6$)是环而不是域；

16. 证明：群的直接积($X\times Y$; $\odot\times\odot$)有一个与(X; $\odot$)同构的正规子群。

17. 求(Z_3; $\oplus_3$)与($Z_3-\{0\}$; $\otimes_3$)的直接积。

18. 求证同一个群的两个正规子群的交仍是正规子群。

19. 求证(Z_6; $\oplus_6$)中的 $\{0, 3\}$ 是它的子群，写出(Z_6; $\oplus_6$)对这个子群的一切左陪集。

第三章小结

本章介绍了一些很概括的概念，每个概念都有很广泛的内涵，它们是：

1．两个集合之间的一个关系；关系间的运算、复合、逆；关系的图形及结合矩阵表示。

2．按等价关系进行分类。

3．两个集合之间的映射；映射的一对一性、在上性；复合映射；逆映射。

4．集合上的运算；运算的交换性、结合性、两种运算之间的分配性；运算的单位元、零元、逆元。

5．作为集合与运算相结合的代数系统；同态与同构；等价关系与运算的相容性；商系统。

6．常见的代数系统：半群、群、环、域；它们的同态与同构。

第四章

集合的数数问题

计算满足某些特定条件的对象一共有多少个，这是我们常见的问题。用集合的语言来叙述就是：对给定的某些特殊类型的有限集，要问它究竟有多少个元素。本章的内容就是讨论这个问题。在中学里我们学过数的加法和乘法原则，并用来计算排列组合的问题，所以本章第一节先对这些知识作一简要的复习。

第一节 数数原则及排列组合的复习与补充

1.1 数数原则及排列组合的复习

一个有限集的元素一共只有有限个，所以原则上总可以一个一个地数。而对一些特殊类型的有限集，还可以在"一个一个地数"的基础上发现某种规律性，最后得到它的元素数目的某个公式，这就是本章的内容之一。当然，也有一些有限集的元素数目不可能得到一个公式，这就需要进而研究近似公式，例如在数论中，就需要研究这种近似公式，这就不是本书的任务了。

要得到数数的规律，基础是"一个一个地数"。只有在"一个一个地数"的过程中总结经验才能逐步化简而得到简单的公式。

"一个一个地数"必须要对集合中的元素排先后次序，要防止数漏或数重，最保险的办法是用字典排列法或者画一个

象一颗树一样的图，去数这个"树"图的顶枝．这种方法虽然可靠，但是很繁琐．在某些常见而又简单的情形下，能总结出一些规律，那就是：

数数的加法原则 如果有一件事可以在 k 种不同的情况下完成．在第一种情况中又可以有 m_1 种完成的方式；在第二种情况中又可以有 m_2 种完成的方式；…；在第 k 种情况中又可以有 m_k 种完成的方式；那末完成这件事一共有 $m_1+m_2+\cdots+m_k$ 种不同的方式．

数数的乘法原则 如果完成某一件事必须经过 l 个步骤．第一个步骤可以有 n_1 种完成方式，第二个步骤可以有 n_2 种完成方式，…，第 l 个步骤可以有 n_l 种完成方式，那末完成这件事一共有 $n_1n_2\cdots n_k$ 种不同方式．

需要注意：应用加法原则和乘法原则的条件的区别，不可混淆．但在某些情况下，需要混合使用这两个原则．这些原则最直接的应用就是排列组合问题．

排列问题就是对某些不同的元素（或对象）的全部或一部分进行排队．按元素可不可以重复排列而分成两大类．对可重复的排列一般只讨论最简单的情形，即：每个元素的重复次数可以是任意的，也即可无限重复情形．最一般的可重复排列是很复杂的，本书不予讨论．

模型 R（可重复的排列模型） 设有带号码1、2、…、n 的 n 种球，每种有足够多个（此即可重复性）．在这堆球中，依次取出 m 个（m 可以比 n 大），把这 m 个号码按抽取的先后次序排成一排，则其不同排法的数目（记为 R_n^m）为

$$R_n^m=n^m.$$

模型 P（不可重复的排列模型） 设有带号码1、2、…、n 的 n 种球各1个（此即不可重复性）．在这堆球中，依次取出

m 个($m<n$)，把这 m 个号码按抽取的先后次序排成一排，则其不同排法的数目(记为 P_n^m)为

$$P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)\left(=\frac{n!}{(n-m)!}\right).$$

组合问题与排列问题的差别在于：在组合问题中被取出的元素是不计次序差别的，即不管什么元素先选，什么元素后选，只要被取出的一堆是一样的，就只算一次，看成为一个可能被选取的组，叫做一个组合．全体可能组合的个数叫做组合数．组合也有不可重复与可重复的两类，其中第二类在中学里未讲过．

一个不重复的组合就是一种分组，因此不可重复的组合问题的模型可以用下述两种互相等价的形式叙述：

模型 C 设有带号码 1、2、…、n 的球各 1 个(即不可重复性)，要在这 n 个球中分出 m 个($m\leqslant n$)，不计它们的次序，则其不同分法的数(记为 C_n^m)为

$$C_n^m=P_n^m/P_m^m\left(=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\right)$$

[记号 C_n^m 在有些书上也写成 $C(n, m)$ 或 $\binom{n}{m}$].

模型 C' 把分别带有号码 1、2、…、n 的 n 个球分成两组：一组 m 个，另一组 $n-m$ 个，则其不同的组合数(分组数目)为

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

组合数有两个基本公式：

$$C_n^m=C_n^{n-m}\quad(\text{约定 } C_n^0=1);$$

$$C_{n+1}^{m+1}=C_n^m+C_n^{m+1}\quad(n\geqslant m+1).$$

下面讨论可重复的组合问题.

1.2 可重复的组合问题

可重复的组合问题也是从n种不同的元素中选取m个.我们知道,在不可重复的组合问题中,这n种元素每种只有一个(也就是说n个元素都是不同的),而在允许重复的组合问题中,这n种元素每种可以有充分多的个数.因此,这时m可以大于n.但是这两种组合问题又有一个共同点,就是被选出的元素之间都是不计先后次序的.

可重复的组合问题的一般模型为:

模型D 设有带号码1、2、…、n的n种球,每种都有足够多的个数(也就是可重复),在这一堆球中任意取出m个(m可以大于n),不计它们的次序,组成一组.问一共有多少个不同的组?

这模型也可以叙述成:

模型D' 设匣中有带号码1、2、…、n的球各一个,在这n个球中任取一个,记下其号码后,放回匣中;然后再取一个,同样记下号码后,放回匣中;…;依此重复m次,一共记下m个号码,不计它们的次序,归成为一组,问一共有多少个不同的组?

设模型D(或模型D')中的全部不同的组数为D_n^m,称为从n个不同元素中取m个的可重复组合数.

下面推导计算D_n^m的公式:设取到的m个球的号码为:

$$m_1\text{个“1”},\ m_2\text{个“2”},\ \cdots,\ m_n\text{个“}n\text{”},$$

其中

$$m_1+m_2+\cdots+m_n=m \quad (0\leqslant m_i\leqslant m,\ i=1,\ \cdots,\ n),$$

把这m个号码按大小排成次序,不同的号码之间用记号 * 分开,于是这m个号码就成为

$$m_1\text{个}“1”*m_2\text{个}“2”*\cdots*m_n\text{个}“n”.$$

因为号码有 n 类(“1”, “2”, …, “n”), 中间的“隔号” * 自然就是 $n-1$ 个. 如果把这 m_1 个 “1” 写成 m_1 个 Δ, 同样把 m_2 个 “2”, …, m_n 个 “n” 都写成 Δ, 也不会引起混淆. 例如若某个 $m_k=0$, 则相应的区段中就没有 Δ, 即出现连续的两个 *. 经过这样转换后, 原来的 m 个号码就成为

$$\underbrace{\Delta\cdots\Delta}_{m_1\text{个}}*\underbrace{\Delta\cdots\Delta}_{m_2\text{个}}*\cdots*\underbrace{\Delta\cdots\Delta}_{m_n\text{个}}.$$

这就变成了 m 个 Δ 和 $n-1$ 个 * 在 $m+(n-1)$ 个位置中的分配问题, 即在这 $m+n-1$ 个位置中, 哪 $n-1$ 个地方应是 * 的问题. 这 $n-1$ 个 * 在 $m+n-1$ 个位置中的一种分配恰恰表达了被选出的 m 个号码的一种不同的组. 而在 $m+n-1$ 个位置中取 $n-1$ 个为 * 的不同取法数为 C_{m+n-1}^{n-1}, 因此有

$$\text{公式}\quad D_n^m=C_{m+n-1}^{n-1}=\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}\quad(\text{或}=C_{m+n-1}^m).$$

【例 1】 设 m 是正整数, 问方程

$$x_1+\cdots+x_n=m$$

的非负整数解 $(x_1, \cdots, x_n)$ 一共有多少组?

解: 我们可把 $(x_1, \cdots, x_n)$ 看成 x_1 个 1 号球、x_2 个 2 号球、…、x_n 个 n 号球, 条件 $x_1+\cdots+x_n=m$ 表示总共 m 个号码. 于是本问题中所求的非负整解 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的组数就是从 n 种球中取 m 个的重复组合数, 即 $D_n^m=C_{n+m-1}^m$.

【例 2】 问 $(y_1+\cdots+y_n)^m$ 的展开式中有多少不同的项?

解: $(y_1+\cdots+y_n)^m$ 展开式的一般项为

$$y_1^{m_1}y_2^{m_2}\cdots y_n^{m_n}$$

$$(m_1+\cdots+m_n=m,\ m_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

于是方程 $m_1+\cdots+m_n=m$ 的一组非负整数解 $(m_1,\ \cdots,\ m_n)$ 就提供了一个项 $y_1^{m_1}\cdots y_n^{m_n}$. 因此 $(y_1+\cdots+y_n)^m$ 展开式的项数就等于方程 $m_1+\cdots+m_n=m$ 的非负整解的组数，即 C_{n+m-1}^m.

【例 3】 把 m 个完全相同的球(即都是 1 号球)放在格子“1”、“2”、…、“n”中. 问有多少种不同的放法?

解：这问题中的一种不同放法相当于把 m 个 Δ(即“1”)用 $n-1$ 个 * 隔起来的一种不同的分隔法. 所以不同的放法有 C_{n+m-1}^m 种.

对于一个问题要区别它是排列问题还是组合问题是很重要的. 为此，我们把排列与组合列表(表 1)比较如下：

表 1

<table>
<tr><th></th><th colspan="3">可重复</th><th colspan="3">不可重复</th></tr>
<tr><td>排列</td><td rowspan="2">n 种球，每种有足够(大于 n)多，取 m 个(或每种一个，但选取一次记下号码后放回去，再取第二个，…，如此重复 m 次)</td><td>抽出的 m 个，按抽出的先后次序排列</td><td>重复排列数 $E_n^m=n^m$</td><td rowspan="2">n 种球，每种一个，取 m 次 $(m\leqslant n)$</td><td>抽出的 m 个按抽出的先后次序排列</td><td>排列数 P_n^m</td></tr>
<tr><td>组合</td><td>抽出的 m 个，不计次序组成一组</td><td>重复组合数 $D_n^m=C_{n+m-1}^m$</td><td>抽出的 m 个，不计次序组成一组</td><td>组合数 C_n^m</td></tr>
</table>

以上所讨论的“可重复”都是指重复次数可以是任意的(即可以无限次重复).

至于对可重复次数有限的情形，不论是排列问题还是组合问题，要找出解的规律性及统一的表达式都很难. 我们就不讨论了.

1.3 组合的推广——分成多个组的不同分法数

不可重复的组合问题是把 n 个不同元素的全体分成 m 及 $n-m$ 个元素的两个组. 自然，可以进一步考虑把 n 个不同元素的全体分成 n_1、n_2、…、n_k 个元素的 k 个组 $(n_1+\cdots+n_k=n)$ 的问题. 这就是:

模型 M 设有带号码"1"、"2"、…、"n"的球各 1 个，今有正整数 n_1、n_2、…、n_k，满足 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$，如果把这 n 个球分成 k 组，使第一组有 n_1 个，第二组有 n_2 个，…，第 k 组有 n_k 个，问有多少种不同的分组法?

我们把模型 M 中的不同的分组法的数目记为 $C_n^{n_1,n_2,\cdots,n_k}$ [或 $\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}$]. 下面推导计算它的公式.

把 n 个球分成模型 M 所要求的 k 组可以通过 $k-1$ 个步骤来完成:

第一步: 把 n 个球分成数目分别为 n_1 及 $n_2+\cdots+n_k$ 的两组，这是组合问题，共有 $C_n^{n_1}$ 种不同分法;

第二步: 再把第二组的 $n_2+\cdots+n_k$ 个球分成数目分别为 n_2 与 $n_3+\cdots+n_k$ 的两组，共有 $C_{n_2+\cdots+n_k}^{n_2}$ 种不同分法;

……

第 $k-1$ 步: 把第 $k-2$ 步中的第二组的 $n_{k-1}+n_k$ 个球分成数目分别为 n_{k-1} 与 n_k 的两组，共有 $C_{n_{k-1}+n_k}^{n_{k-1}}$ 种不同分法.

根据数数的乘法原理，这 $k-1$ 个步骤连起来成为一件事，则完成这件事的不同方法数应为

$$C_n^{n_1}\cdot C_{n_2+\cdots+n_k}^{n_2}\cdots C_{n_{k-1}+n_k}^{n_{k-1}} \quad (n-n_1=n_2+\cdots+n_k)$$

$$=\frac{n!}{n_1!(n_2+\cdots+n_k)!}\cdot\frac{(n_2+\cdots+n_k)!}{n_2!(n_3+\cdots+n_k)!}\cdots\frac{(n_{k-1}+n_k)!}{n_{k-1}!n_k!}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

因此 $$C_n^{n_1,n_2,\cdots,n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

重复次数有限的排列问题有时可以转化为组合问题. 例如

【例 1】 有 n_1 个 "1" 号球, …, n_k 个 "k" 号球排成一排, 问有多少种不同的排法?

解: 这相当于把 $n_1+\cdots+n_k$ 个位置分成 k 个组, 第一组放 "1" 号球, 第二组放 "2" 号球, …, 因此排法数就归纳为模型 M 所提供的分法数, 即 $C_{n_1+\cdots+n_k}^{n_1,\cdots,n_k}$.

【例 2】 *banana* 这六个字母可以排成外表不同的"字"多少个?

解: 这里有一个 b, 二个 n, 三个 a, 相当于在上题中 $n_1=1$, $n_2=2$, $n_3=3$. 其不同字数(就是不同排法数)应为

$$C_{n_1+n_2+n_3}^{n_1,n_2,n_3}=C_6^{1,2,3}=\frac{6!}{1!2!3!}=60.$$

1.4 应用组合解题的一些例子

【例 1】 检查马路上的一排树是健康的还是有病的, 把健康的树记以 α, 有病的树记以 β. 对 α、β 按照与树同样的次序排起来, 例如若总数为 18 棵树, 则可能出现的情况之一为

$$\alpha\beta\alpha\alpha\beta\alpha\alpha\alpha\beta\beta\alpha\alpha\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta.$$

从左往右数, 同一个字母连着的一组叫做该字母的一个连贯(或游程). 上述情况有 6 个 α 连贯, 6 个 β 连贯, 总共为 12 个连贯. 一般说来, 可以认为: 如 β 连贯数少且连贯短, 则树病只是个别"感染"; 如 β 连贯数少但连贯较长, 则树病在某些局部流行; 如 β 连贯数多, 则树病已全面流行.

现在就同类连贯出现的次数讨论其计算. 设有 n_1 个 α,

n_2 个 β, 问这 n_1+n_2 个文字的全部 $C_{n_1+n_2}^{n_1}$ 种排法之中, (1)恰有 r 个 α 连贯、r 个 β 连贯的排法有多少种? (2)恰有 r 个 α 连贯、$r\pm1$ 个 β 连贯的排法有多少种?

第一个问题可以分两个步骤数数:第一步把 n_1 个 α 排成 r 个组,这等于把 n_1 个相同的球(例如"1"号球)放到 r 个格中,使每格不空. 因此可先在这 r 个格中各放一个,然后把其余的 n_1-r 个自由地放在 r 个格中,一共有 $C_{(n_1-r)+r-1}^{n_1-r}=C_{n_1-1}^{n_1-r}$ 种不同放法($r-1$ 个"隔板");第二个步骤是把 n_2 个 β 分成 r 个连贯,与上面类似,可有 $C_{n_2-1}^{n_2-r}$ 种不同的可能. 于是问题(1)的解为 $C_{n_1-1}^{n_1-r}\cdot C_{n_2-1}^{n_2-r}$.

同理,问题(2)的解分别为 $C_{n_1-1}^{n_1-r}\cdot C_{n_2-1}^{n_2-r\mp1}$.

连贯数还可以用来判断随机性.用通俗的语言说,随机性就是与"任何有规律的安排"完全对立的一种性质. 例如公园中有一排座位共 n 个,有 m 个人(设 m 比 n 小很多)去坐,这 n 个座位就成了"空"与"占"两个字的一个排法. 如果出现的连贯数很多,则说明这批人可能互相不熟悉;如果出现的连贯数很少,则说明这批人中可能有不少人互相比较熟悉. 这两种疏远与亲密的现象就都带有一定的规律性;如果连贯数既不太多又不太少,则坐法就表现出一定的"随机性".

连贯数也有助于比较同一产品的两种不同处理方法的效果. 例如:对某产品有甲、乙两种处理方法,其效果表现在产品的某个指标上. 若对第一种处理方法做了 n_1 次试验,得到了 n_1 个产品,其指标按大小次序排成 $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{n_1}$;对第二种处理方法做了 n_2 次试验,得到了 n_2 个产品,其指标按大小次序排成 $\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_{n_2}$. 我们把 α_1, $\cdots$, α_{n_1}, β_1, $\cdots$, β_{n_2} 按大小次序混合排成一排,然后把一切 α_i 改写成 α,把一切 β_j 改写成 β,如果出现的连贯数不很少,说明 α 组与 β 组

混合得较紧，就反映了这两种处理方法的效果没有明显的差别.

【例 2】(首次相遇问题) 把 n 个不相同的球"1"、"2"、…、"n"一个一个地放到 n 个格子中，问

(1) 当首次发现有一个格子中有 2 个球时，放了 r 个球的不同放法有多少种？

(2) 当第一格中有 1 个球时，放了 r 个球的不同放法有多少种？

解：在问题(1)中，第 r 个球必与其前面的某个球在同一格中，所以这 r 个球恰恰占了 $r-1$ 个格. 这个问题的数数可分三个步骤完成：第一个步骤在 n 格中选 $r-1$ 格用以放 r 个球，共 C_n^{r-1} 种不同选法；第二个步骤是把前 $r-1$ 个球放到第一步骤选出的 $r-1$ 个格子中，共 P_{r-1} 种不同放法；第三个步骤是把第 r 个球放到这 $r-1$ 格中的任一格，共 $r-1$ 种不同放法. 所以总的不同放法的数目为

$$(r-1)P_{r-1}C_n^{r-1}=(r-1)P_n^{r-1}.$$

问题(2)说明了前 $r-1$ 个球都必须放在第二格至第 n 格中，不同放法数为 $R_{n-1}^{r-1}=(n-1)^{r-1}$.

【例 3】(美国 1977 年数学竞赛题) 有一块短边与长边分别为 4 与 7 的矩形地，要用黑白两色单位面积的方形砖铺上，试证明：不管怎样铺，必然存在一块长方形的部分使它的四个角有相同的颜色.

【证】 考虑一个 4 行 7 列的表，表中每个元素只能取 0 或 1，分别代表在对应的地方铺上黑色或是白色方砖，因此我们只需证明："存在两行和两列，使其四个相交处的对应元素要么全是 0，要么全是 1"，我们简称这一性质为"四角同色"性质. 下面分两种情形考虑：

第一种情形：存在一个列，其中至少有三个0或至少有三个1. 不妨设有三个0(因为对于有三个1的情形在分析上是完全一样的)，既然一列中已有三个0，我们只需证明就在这三个0所在的三行不能避免"四角同色"就够了. 如果要避免"四角同色"，在这三行中最多能安排多少列呢？由于在这三行中，第一列全为0，为了避免"四角同色"，以后能安排的列必须只有一个0或没有0，而且这两者不能同时存在(否则就有一个四角为1的矩形了). 所以按0可能出现的三个不同位置，最多还能安排三列，成为$\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$，以后再安排任何列时都会出现"四角同色". 但是因为一共有七个列，所以"四角同色"是不可避免的.

第二种情形：所有的列都有2个0和2个1，这样最多有$C_4^2=\frac{4\cdot 3}{2}=6$个不同的列. 但我们假定有七列，所以必然有两列完全一样. 这就出现了"四角同色". ▌

上述证明中，顺便说明了：如果只有六列，那末就存在一种可以避免"四角同色"的铺法，这种铺法就是安排六个不同的列，每列为两个白的、两个黑的.

习 题 4·1

1. 证明下列等式，并说明它们的组合含义：

 (1) $C_n^m=C_{n_1}^0C_{n-n_1}^m+C_{n_1}^1C_{n-n_1}^{m-1}+\cdots+C_{n_1}^mC_{n-n_1}^0$ $(m\leqslant n_1$ 及 $n-n_1)$；

 (2) $P_{n_1+n_2}^m=\sum\limits_{k=0}^{m}C_m^kP_{n_1}^kP_{n_2}^{m-k}$ $(m\leqslant n_1,\ n_2)$；

 (3) $C_{n+1}^{m+1}=C_n^m+C_{n-1}^m+\cdots+C_m^m$ $(m<n)$.

2. 化简 $C_m^0+C_{m+1}^1+C_{m+2}^2+\cdots+C_{m+k}^k$.

3. 求证: (1) $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$;

(2) $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$;

(3) $C_n^1+2C_n^2+\cdots+nC_n^n=n2^{n-1}$;

(4) k 个连续整数的乘积必是 k 的倍数.

4. 把 $4n$ 个人分成数目相等的 4 组, 不计组号的差异, 问有多少种不同的分法?

5. 从10个连起来的坐位中找两组,每组都是连起来的三个位置.

(1) 如果两组可以连在一起,问一共有多少种不同的方案?

(2) 如果两组不可连在一起,问一共有多少种不同的方案?

6. 设有 n 个位置,每组共有连起来的 m 个位置($n>2m$), 就此情况按上题的提问进行讨论和解答,并讨论下列两种情况的区别:

(1) 两组可连在一起;

(2) 两组不可连在一起.

7. 在50个身高完全不同的人中选两队, 每队5个人, 使甲队最矮者比乙队最高者还高,问有多少种不同的选法?

[提示: 以乙队最高的人为标准分情况考虑.]

8. 任取4个分币,问一共可以组成多少种不同的组合数?

9. 把 n 个相同的东西任意分给 m 组,问有多少种不同的分法?

10. 把 r 个完全一样的球放在 n 个不同的格子中($r\gg n$), 问

(1) 每格至少有2个球的分法有多少种?

(2) 第一格是空的分法有多少种?

11. 有任意多个"1"号球, "2"号球, …, "n"号球, 从它们中间取出 r 组: 第一组 k_1 个球, …, 第 r 组 k_r 个球, 问有多少种不同的取法?

12. 把22本书分给5个人, 使其中任意2个人各有5本, 其它3个人各有4本,问有多少种不同分法?

13. $2n$ 个人分成 n 个互助组(不计组号的差异),问有多少种不同分法?

14. 在 8×8 的棋盘上,

(1) 选两个既不在同行又不在同列的方块, 问有多少种不同的选法?

(2) 选4个方块, 使它们恰在某一矩形的4个角上, 问有多少种不同的选法?

15. n 个可重复的递增的字母 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ 可以组成一个节长为 n，且字母次序为递增的字"$x_1x_2x_3\cdots x_n$"，称为 n-有序字．今有 m 个有次序的字母 $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$，问能组成多少个 n-有序字？

第二节　集合的运算与数数的关系

2.1　集合的运算与数数的关系、排斥与包含原理

设有限集 A 中的元素个数为 $n(A)$，B 中的元素个数为 $n(B)$，那末用乘法原则显然可得到

$$n(A\times B)=n(A)\cdot n(B)=n(B\times A).$$

对于其它运算，有

定理 1　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$.

【证】　已知 $n(A\cup B)$ 是 $A\cup B$ 的元素个数，因为 A 和 B 的重复元素在 $A\cup B$ 中只算一个，所以 $n(A\cup B)$ 应等于 $n(A)+n(B)$ 中扣除重复计算的数目 $n(A\cap B)$ 后的数．▌

推论 (1)　若 $A\cap B=\emptyset$，则 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$；

(2)　$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$；

(3)　若 $B\subset A$，则 $n(A-B)=n(A)-n(B)$；

(4)　对全集 U，有 $n(\overline{A})=n(U)-n(A)$；

(5)　
$$\begin{aligned}n(A_1\cup A_2\cup A_3)=&\,n(A_1)+n(A_2)+n(A_3)\\&-n(A_1\cap A_2)-n(A_2\cap A_3)-n(A_3\cap A_1)\\&+n(A_1\cap A_2\cap A_3).\end{aligned}$$

【证】　(1)～(4)是显然的．为证(5)，可先把 $A_2\cup A_3$ 看成 B，应用定理 1，可得到

$$\begin{aligned}n(A_1\cup A_2\cup A_3)&=n(A_1)+n(A_2\cup A_3)-n[A_1\cap(A_2\cup A_3)]\\&=n(A_1)+n(A_2\cup A_3)\\&\quad-n[(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3)].\end{aligned}$$

对等式右方第二项和第三项分别再用一次定理 1，就可得到推论(5)．】

设有 n 个有限集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，令

$$S_1(A_1, \cdots, A_n)=\sum_{i=1}^{n} n(A_i)=n(A_1)+\cdots+n(A_n);$$

$$\begin{aligned}S_2(A_1, \cdots, A_n)&=\sum_{i<j} n(A_i\cap A_j)\\&=n(A_1\cap A_2)+\cdots+n(A_1\cap A_n)\\&\quad+n(A_2\cap A_3)+\cdots+n(A_2\cap A_n)\\&\quad+\cdots+n(A_{n-1}\cap A_n);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_3(A_1, \cdots, A_n)&=\sum_{i_1<i_2<i_3} n(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3})\\&=n(A_1\cap A_2\cap A_3)\\&\quad+\cdots+n(A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n)\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}S_k(A_1, \cdots, A_n)&=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} n(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})\\&=n(A_1\cap\cdots\cap A_k)\\&\quad+\cdots+n(A_{n-k+1}\cap\cdots\cap A_n)\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n(A_1, \cdots, A_n)=n(A_1\cap\cdots\cap A_n).$$

把它们简记为 $S_1, S_2, \cdots, S_n$，则有：

定理 2（排斥与包含原理）

$$n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=S_1-S_2+S_3-\cdots+(-1)^{n+1}S_n.$$

【证】 应用数学归纳法，$n=2$ 时定理 2 就是定理 1． 设 $n=l$ 时定理正确．

当 $n=l+1$ 时，有

$$
\begin{aligned}
& n(A_1\cup\cdots\cup A_l\cup A_{l+1}) \\
&\quad = n(A_1\cup\cdots\cup A_l)+n(A_{l+1}) \\
&\qquad -n[(A_1\cup\cdots\cup A_l)\cap A_{l+1}] \\
&\quad = n(A_1\cup\cdots\cup A_l)+n(A_{l+1}) \\
&\qquad -n[(A_1\cap A_{l+1})\cup\cdots\cup(A_l\cap A_{l+1})] \\
&\quad = S_1(A_1,\ \cdots,\ A_l)+n(A_{l+1})-S_2(A_1,\ \cdots,\ A_l) \\
&\qquad +\cdots+(-1)^{k+1}S_k(A_1,\ \cdots,\ A_l) \\
&\qquad +\cdots+(-1)^{l+1}S_l(A_1,\ \cdots,\ A_l) \\
&\qquad -S_1(A_1\cap A_{l+1},\ \cdots,\ A_l\cap A_{l+1}) \\
&\qquad +S_2(A_1\cap A_{l+1},\ \cdots,\ A_l\cap A_{l+1}) \\
&\qquad +\cdots+(-1)^{k+2}S_k(A_1\cap A_{l+1},\ \cdots,\ A_l\cap A_{l+1}) \\
&\qquad +\cdots+(-1)^{l+2}S_l(A_1\cap A_{l+1},\ \cdots,\ A_l\cap A_{l+1}).
\end{aligned}
$$

但是由 $S_2,\ \cdots,\ S_l$ 的定义，有

$$
\begin{aligned}
& S_1(A_1,\ \cdots,\ A_l)+n(A_{l+1})=S_1(A_1,\ \cdots,\ A_{l+1}), \\
& S_2(A_1,\ \cdots,\ A_l)+S_1(A_1\cap A_{l+1},\ \cdots,\ A_l\cap A_{l+1}) \\
&\quad =S_2(A_1,\ \cdots,\ A_{l+1}), \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& S_k(A_1,\ \cdots,\ A_l)+S_{k-1}(A_1\cap A_{l+1},\ \cdots,\ A_l\cap A_{l+1}) \\
&\quad =S_k(A_1,\ \cdots,\ A_{l+1}), \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& S_l(A_1\cap A_{l+1},\ \cdots,\ A_l\cap A_{l+1})=S_{l+1}(A_1,\ \cdots,\ A_{l+1}).
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
n(A_1\cup\cdots\cup A_{l+1}) &= S_1(A_1,\ \cdots,\ A_{l+1})-S_2(A_1,\ \cdots,\ A_{l+1}) \\
&\quad +\cdots+(-1)^{k+1}S_k(A_1,\ \cdots,\ A_{l+1}) \\
&\quad +\cdots+(-1)^{l+2}S_{l+1}(A_1,\ \cdots,\ A_{l+1}).
\end{aligned}
$$

于是定理对 $n=l+1$ 也是成立的，因此由数学归纳法原理可知，定理对一切 n 都成立. ▌

排斥和包含原理又称为交互分类原理.

在不会引起混淆时，$S_k(A_1, \cdots, A_n)$ 可简记为 S_k.

【例 1】 某班有 32 个孩子，其中 15 个有兄弟，14 个有姊妹，8 个既无兄弟又无姊妹，求

(1) 该班中有兄弟但无姊妹的人数；

(2) 该班中既有兄弟又有姊妹的人数.

解：令

U = 该班中全体孩子；

A = 该班中有兄弟的那些孩子；

B = 该班中有姊妹的那些孩子.

由假定知：$n(U)=32$, $n(A)=15$, $n(B)=14$, $n(\overline{A}\cap\overline{B})=8$.
于是由定理 1 知：

$$\begin{aligned} n(A\cap B) &= n(A)+n(B)-n(A\cup B) \\ &= 15+14-[n(U)-n(\overline{A}\cap\overline{B})] \\ &= 29-[32-8]=5. \end{aligned}$$

所以

(1) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=15-5=10$;

(2) $n(A\cap B)=5$.

【例 2】 在 1 到 250 这些连续整数中，问能被 2 或 3 或 5 或 7 中某一个整除的数有多少个？

解：设

U = 1 到 250 的所有整数；

A_1 = U 中能被 2 整除的数的全体；

A_2 = U 中能被 3 整除的数的全体；

A_3 = U 中能被 5 整除的数的全体；

A_4 = U 中能被 7 整除的数的全体.

那末

$$n(A_1)=\frac{250}{2}=125,\quad n(A_2)=\left[\frac{250}{3}\right]=83,$$

$$n(A_3)=\frac{250}{5}=50,\quad n(A_4)=\left[\frac{250}{7}\right]=35.$$

(记号$[x]$表示实数x的整数部分，即不大于x的最大整数)．
所以 $S_1(A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4)=125+83+50+35=293.$

$$n(A_1\cap A_2)=\left[\frac{250}{2\cdot 3}\right]=\left[\frac{250}{6}\right]=41,$$

$$n(A_1\cap A_3)=\left[\frac{250}{2\cdot 5}\right]=\left[\frac{250}{10}\right]=25,$$

$$n(A_1\cap A_4)=\left[\frac{250}{2\cdot 7}\right]=\left[\frac{250}{14}\right]=17,$$

$$n(A_2\cap A_3)=\left[\frac{250}{3\cdot 5}\right]=\left[\frac{250}{15}\right]=16,$$

$$n(A_2\cap A_4)=\left[\frac{250}{3\cdot 7}\right]=\left[\frac{250}{21}\right]=11,$$

$$n(A_3\cap A_4)=\left[\frac{250}{5\cdot 7}\right]=\left[\frac{250}{35}\right]=7.$$

于是

$$S_2(A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4)=41+25+17+16+11+7=117.$$

$$n(A_1\cap A_2\cap A_3)=\left[\frac{250}{2\cdot 3\cdot 5}\right]=8,$$

$$n(A_1\cap A_2\cap A_4)=\left[\frac{250}{2\cdot 3\cdot 7}\right]=5,$$

$$n(A_1\cap A_3\cap A_4)=\left[\frac{250}{2\cdot 5\cdot 7}\right]=3,$$

$$n(A_2\cap A_3\cap A_4)=\left[\frac{250}{3\cdot 5\cdot 7}\right]=2,$$

所以 $S_3(A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4)=8+5+3+2=18.$

而

$$S_4(A_1, A_2, A_3, A_4)=n(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)$$
$$=\left[\frac{250}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\right]=\left[\frac{250}{210}\right]=1.$$

由定理 2:

$$n(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=S_1-S_2+S_3-S_4$$
$$=293-117+18-1=193.$$

因此，不大于 250 且能被 2、3、5、7 之一整除的数有 193 个。

【例 3】 设 n 是一个正整数，a_1、a_2、…、a_m 是两两互质的正整数，问不大于 n 且不以 $a_i(i=1, \cdots, m)$ 中任一个为因数的正整数一共有多少个?

解: 令 $U=\{$不大于 n 的正整数全体$\}$,

$A_i=\{U$ 中能被 a_i 整除的数全体$\}$.

于是我们需求的数即是 $n(\overline{A}_1\cap\cdots\cap\overline{A}_m)$. 它等于

$$n(\overline{A_1\cup\cdots\cup A_m})=n(U)-n(A_1\cup\cdots\cup A_m)$$
$$=n-n(A_1\cup\cdots\cup A_m).$$

由定理 2, 上式等于

$$n-S_1+S_2-S_3+\cdots+(-1)^m S_m.$$

仿照例 2, 有

$$S_1=\sum_i\left[\frac{n}{a_i}\right],\quad S_2=\sum_{i<j}\left[\frac{n}{a_ia_j}\right],\cdots$$

$$S_k=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\left[\frac{n}{a_{i_1}\cdots a_{i_k}}\right],\ \cdots,\ S_m=\left[\frac{n}{a_1\cdots a_m}\right].$$

【例 4】 设 n 为正整数. 不大于 n 且与 n 互质的数的个数记成 $\varphi(n)$, 称为欧拉的 Φ 函数. 若 n 的全体质因子为 $p_1, \cdots, p_m$, 那末一个不大于 n 的数与 n 互质的充要条件为: 它不以 $p_1, \cdots, p_m$ 中任意一个为因子. 因此由例 3 可得

$$\varphi(n)=n-\sum_{i}\frac{n}{p_i}+\sum_{i<j}\frac{n}{p_ip_j}-\cdots+(-1)^m\frac{n}{p_1\cdots p_m}$$
$$=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)$$
$$=n\prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{1}{p_i}\right).$$

一般说来，仅仅知道 $n(A)$ 及 $n(B)$ 对于确定 $n(A\cap B)$ [或 $n(A\cup B)$] 是不够的. 例如 $A=B$ 时，$n(A\cap B)=n(A)$；而 $A\cap B=\emptyset$ 时，$n(A\cap B)=0$. 所以只有在某种补充假定下，才能从 $n(A)$ 及 $n(B)$ 确定 $n(A\cap B)$. 一种最重要的假定就是"A 对 B 无影响"，即

定义 1 设 U 为全集，A 及 B 是 U 的子集. 如果 B 在全集 U 中所占的分量同 B 在 A 中那一部分在 A 中所占的分量一样，即

$$\frac{n(B)}{n(U)}=\frac{n(B\cap A)}{n(A)}.$$

则称 A 对 B 无影响.

反之，如果"A 对 B 无影响"，则有 $\frac{n(B)}{n(U)}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$. 所以，$\frac{n(A)}{n(U)}=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$，则是"$B$ 对 A 无影响". 这两种情况有时也称为集合"A 与 B 独立". 这时候就有

$$n(A\cap B)=\frac{n(A)\cdot n(B)}{n(U)}.$$

这就是说：在 A 与 B 独立的假定下，可以由 $n(A)$ 及 $n(B)$ 利用上面的公式计算 $n(A\cap B)$.

2.2 组合变换的互逆公式

利用二项展开定理，有

$$x^m=[1-(1-x)]^m=\sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_m^k(1-x)^k \qquad (1^\circ)$$

及

$$(1-x)^m=\sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_m^kx^k. \qquad (2^\circ)$$

从这两个公式，可以看到用序列 $\{(1-x)^m\}_{m\geq 0}$ 来表示序列 $\{x^m\}_{m\geq 0}$ 的公式(1°)与用序列 $\{x^m\}_{m\geq 0}$ 来表示序列 $\{(1-x)^m\}_{m\geq 0}$ 的公式(2°)的形式是完全一样的. (1°)是从 $\{(1-x)^m\}_{m\geq 0}$ 出发得到 $\{x^m\}_{m\geq 0}$ 的一种"变换"，它的系数是一些组合数，所以称它为组合变换. (2°)是从变换后的序列 $\{x^m\}_{m\geq 0}$ 得到原来序列 $\{(1-x)^m\}_{m\geq 0}$ 的变换，称为原来变换(1°)的"逆变换"，它不仅也是一种组合变换，而且其系数与(1°)的系数完全一样，这就是说：对 $\{(1-x)^m\}_{m\geq 0}$ 与 $\{x^m\}_{m\geq 0}$ 这两个序列，正变过来与反变过去都是用同一种组合变换形式. 这种变换互逆的关系可从上面的序列 $\{(1-x)^m\}_{m\geq 0}$ (或 $\{x^m\}_{m\geq 0}$) 推广到一般的序列 a_m. 这就是

定理 1 (第一组合变换的互逆公式) 若对任意正整数 $m\leqslant n$, 均有

$$b_m=\sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_m^ka_k,$$

则有逆转公式

$$a_m=\sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_m^kb_k.$$

要证明本定理，需先证明如下引理 1.

引理 1 $\displaystyle\sum_{k=l}^{m}(-1)^{k+l}C_m^kC_k^l=\begin{cases}1, & l=m;\\ 0, & l<m.\end{cases}$

【证】 由(2°)，有

$$(1-x)^k=\sum_{l=0}^{m}(-1)^lC_k^lx^l. \qquad (2^{\circ\prime})$$

把$(2^{\circ\prime})$代入(1°)后就得到：

$$x^m = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k \sum_{l=0}^{k}(-1)^l C_k^l x^l$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k+l} C_m^k C_k^l x^l$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} a_{kl} x^l,$$

其中

$$a_{kl} = \begin{cases} (-1)^{k+l} C_m^k C_k^l, & l \leqslant k; \\ 0, & l > k. \end{cases} \tag{3°}$$

交换求和的次序后，再用(3)代入，得

$$x^m = \sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} a_{kl} x^l = \sum_{l=0}^{m}\left(\sum_{k=l}^{m}(-1)^{k+l} C_m^k C_k^l\right) x^l.$$

上式中出现在等式两边的都是 x 的多项式，比较系数可得到

$$\sum_{k=l}^{m}(-1)^{k+l} C_m^k C_k^l = \begin{cases} 1, & l = m; \\ 0, & l < m. \end{cases}$$

引理 1 证毕.]

现在证明定理 1. 由引理 1，有

$$a_m = \sum_{l=0}^{m}\left(\sum_{k=l}^{m}(-1)^{k+l} C_m^k C_k^l\right) a_l.$$

再用(3°)就得到

$$a_m = \sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} a_{kl} a_l$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} a_{kl} a_l \quad (\text{注意: } a_{kl} \text{ 在 } k < l \text{ 时, 为 } 0.)$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k+l} C_m^k C_k^l a_l$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k \left(\sum_{l=0}^{k}(-1)^l C_k^l a_l\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k b_k. \quad]$$

定理 2 (第二组合变换的互逆公式) 若对于任意正整数 $m\leqslant n$ 均有

$$b_m=\sum_{k=m}^{n}(-1)^k C_k^m a_k,$$

则有逆转公式

$$a_m=\sum_{k=m}^{n}(-1)^k C_k^m b_k.$$

【证】 由引理 1 可知:

$$\sum_{k=l}^{m}(-1)^{m+k}C_m^k C_k^l=(-1)^{m+l}\sum_{k=l}^{m}(-1)^{k+l}C_m^k C_k^l$$

$$=\begin{cases}1, & l=m;\\ 0, & l<m.\end{cases}$$

当 $k>m$ 时, 定义 $C_m^k=0$ 后有

$$a_l=\sum_{m=l}^{n}\left(\sum_{k=l}^{m}(-1)^{m+k}C_m^k C_k^l\right)a_m$$

$$=\sum_{m=l}^{n}\left(\sum_{k=l}^{n}(-1)^{m+k}C_m^k C_k^l\right)a_m$$

$$=\sum_{k=l}^{n}\sum_{m=l}^{n}(-1)^{m+k}C_m^k C_k^l a_m$$

$$=\sum_{k=l}^{n}\sum_{m=k}^{n}(-1)^{m+k}C_m^k C_k^l a_m \quad (\text{由当 } k>m \text{ 时, } C_m^k=0)$$

$$=\sum_{k=l}^{n}(-1)^k C_k^l\left(\sum_{m=k}^{n}(-1)^m C_m^k a_m\right)$$

$$=\sum_{k=l}^{n}(-1)^k C_k^l b_k.$$ 】

*2.3 排斥与包含原理的推广

令 $N_{[m]}(A_1, \cdots, A_n)$=属于 $A_1, \cdots, A_n$ 中 m 个但不属于其中任意 $m+1$ 个的元素的个数;

$N_{(m)}(A_1, \cdots, A_n)=$属于 $A_1, \cdots, A_n$ 中 m 个的元素的个数.

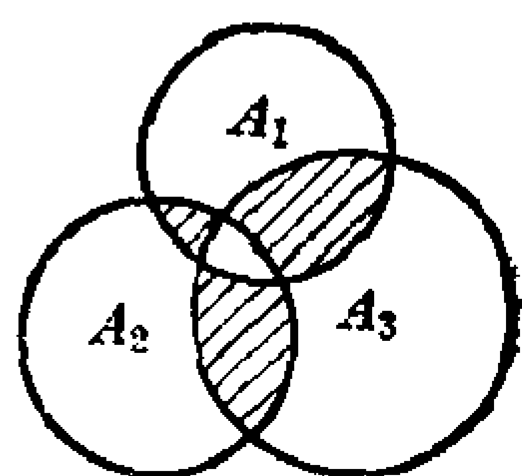


图 4-1

例如在图 4-1 中

$N_{[2]}(A_1; A_2, A_3)$

$=n[(A_1\cap A_2)\cup(A_2\cap A_3)\cup(A_1\cap A_3)-A_1\cap A_2\cap A_3]$

$=n$(阴影部分的集合);

$$N_{(2)}=n[(A_1\cap A_2)\cup(A_2\cap A_3)\cup(A_1\cap A_3)].$$

显然,可有 $$N_{(m)}=N_{[m]}+N_{[m+1]}+\cdots+N_{[n]}.$$

在不会引起混淆的场合,可以用简便的记号 $N_{[m]}$ 及 $N_{(m)}$. 注意:

$$N_{(1)}=n(A_1\cup\cdots\cup A_n).$$

引理1 $$S_k(A_1, \cdots, A_n)=\sum_{m=k}^{n}C_m^k N_{[m]}.$$

【证】 $$S_k(A_1, \cdots, A_n)=\sum_{i_1<\cdots<i_k}n(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}).$$

如果某个元素 x 属于 $A_1, \cdots, A_n$ 中的 k 个而不属于其中任意 $k+1$ 个, 那末就存在 $i_1<\cdots<i_k$, 使 $x\in A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}$, 且 $x\overline{\in}$ 其他 $A_j(j\neq i_1, i_2, \cdots, i_k)$. 这样的元素 x 在计算 $S_k(A_1, \cdots, A_n)$ 中提供了 "1". 全体这样的元素在计算 $S_k(A_1, \cdots, A_n)$中提供了 $N_{[k]}$.

如果某个元素 x 属于 $A_1, \cdots, A_n$ 中的 $k+1$ 个而不属于其中任意 $k+2$ 个. 那末存在 $i_1<\cdots<i_{k+1}$, 使 $x\in A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{k+1}}$, 但 x 不属于 $A_j(j\neq i_1, \cdots, i_{k+1})$. 这样的元素 x, 对任取 $A_{i_1}, \cdots, A_{i_{k+1}}$ 中的 k 个, 都能在计算 $S_k(A_1, \cdots, A_n)$ 中提供 "1", 所以一共提供了 C_{k+1}^k 个 "1", 全体这样的元素 x 在计算 $S_k(A_1, \cdots, A_n)$ 中一共提供了 C_{k+1}^k 个 $N_{[k+1]}$.

同理属于 $A_1, \cdots, A_n$ 中的 $k+2$ 个而不属于其中任意 $k+3$ 个的元素 x 的全体在计算 $S_k(A_1, \cdots, A_n)$中一共提供了 C_{k+2}^k 个 $N_{[k+2]}$.

……

最后属于 $A_1, \cdots, A_n$ 中每一个的元素 x 的全体在计算 $S_k(A_1, \cdots, A_n)$中一共提供了 $C_n^k N_{[n]}$.

在所有上面的元素以外的元素就不再在计算 $S_k(A_1, \cdots, A_n)$ 中提供了. 因此

$$S_k(A_1, \cdots, A_n)=\sum_{i_1<\cdots<i_k} n(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})$$
$$=N_{[k]}+C_{k+1}^k N_{[k+1]}+C_{k+2}^k N_{[k+2]}+\cdots+C_n^k N_{[n]}.$$

引理得证. 】

定理 1(排斥与包含原理的推广)

$$N_{[0]}=n(U)-N_{(1)} \quad (U\text{ 为全集})$$
$$=n(U)-[S_1-S_2+S_3-\cdots+(-1)^{n+1}S_n]$$
$$N_{[m]}=S_m-C_{m+1}^m S_{m+1}+C_{m+2}^m S_{m+2}-\cdots+(-1)^{n-m}C_n^m S_n$$

【证】 由 $N_{[0]}$ 的含义,它就是

$$N_{[0]}=n(\overline{A}_1\cap\cdots\cap\overline{A}_n)$$
$$=n(\overline{A_1\cup\cdots\cup A_n})=n(U)-n(A_1\cup\cdots\cup A_n)$$
$$=n(U)-N_{(1)}.$$

下面证明第二个公式,由引理 1:

$$S_k=\sum_{m=k}^n(-1)^m C_m^k(-1)^m N_{[m]}.$$

这是第二组合变换,利用逆转公式(4.2 定理 2),有

$$(-1)^k N_{[k]}=\sum_{m=k}^n(-1)^m C_m^k S_m,$$

即
$$N_{[k]}=\sum_{m=k}^n(-1)^{m-k}C_m^k S_m,$$

也就是

$$N_{[m]}=\sum_{k=m}^n(-1)^{k-m}C_k^m S_k=S_m-C_{m+1}^m S_{m+1}+C_{m+2}^m S_{m+2}$$
$$-\cdots+(-1)^{n-m}C_n^m S_n.$$ 】

定理 2

$$N_{(m)}=S_m-C_m^{m-1}S_{m+1}+C_{m+1}^{m-1}S_{m+2}$$
$$-\cdots+(-1)^{n-m}C_{n-1}^{m-1}S_n.$$

【证】

$$\begin{cases} N_{[m]}=C_m^m S_m-C_{m+1}^m S_{m+1}+C_{m+2}^m S_{m+2}-\cdots+(-1)^k C_{m+k}^m S_{m+k}+\cdots \\ N_{[m+1]}=C_{m+1}^{m+1}S_{m+1}-C_{m+2}^{m+1}S_{m+2}+\cdots+(-1)^{k+1}C_{m+k}^{m+1}S_{m+k}+\cdots \\ N_{[m+2]}=C_{m+2}^{m+2}S_{m+2}-\cdots+(-1)^k C_{m+k}^{m+2}S_{m+k}+\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{1°}$$

但是 $C_l^j-C_{l-1}^j=C_{l-1}^{j-1}$, 所以

$$C_{m+k}^{m}-C_{m+k}^{m+1}+C_{m+k}^{m+2}-\cdots+(-1)^{k-2}C_{m+k}^{m+k-2}$$
$$+(-1)^{k-1}C_{m+k}^{m+k-1}+(-1)^{k}C_{m+k}^{m+k}$$
$$=C_{m+k}^{m}-C_{m+k}^{m+1}+C_{m+k}^{m+2}-\cdots+(-1)^{k-1}C_{m+k}^{m+k-1}+(-1)^{k}C_{m+k-1}^{m+k-1}$$
$$=C_{m+k}^{m}-C_{m+k}^{m+1}+C_{m+k}^{m+2}-\cdots+(-1)^{k-2}C_{m+k}^{m+k-2}+(-1)^{k-1}C_{m+k-1}^{m+k-2}$$
$$=C_{m+k}^{m}-C_{m+k}^{m+1}+C_{m+k}^{m+2}-\cdots+(-1)^{k-2}C_{m+k-1}^{m+k-3}$$

………………

$$=C_{m+k}^{m}-C_{m+k}^{m+1}+C_{m+k-1}^{m+1}=C_{m+k}^{m}-C_{m+k-1}^{m}=C_{m+k-1}^{m-1}. \qquad (2^\circ)$$

于是由(1°)及(2°)就得到

$$N_{(m)}=N_{[m]}+N_{[m+1]}+N_{[m+2]}+\cdots$$
$$=S_m-C_m^{m-1}S_{m+1}+\cdots+(-1)^kC_{m+k-1}^{m-1}S_{m+k}$$
$$+\cdots+(-1)^{n-m}C_{n-1}^{m-1}S_n. \quad \rbrack$$

【例 1】(匹配问题) 有 n 扇门各有钥匙一把，某人忘记了每把钥匙是开哪一扇门的，于是他把各种分配方式都一一试验，一共有 $n!$ 种分配方式. 问(1)其中有多少种分配方式是不能打开任何门的？(2)恰有 m 个打开的分配方式有多少种？

解：设全集 U 是分配方式的全体. 又若对 $i=1, 2, \cdots, n$, 令 $A_i=$ "能打开第 i 扇门的分配方式的全体"，那末 A_i 所含的所有分配方式中第 i 把钥匙总是分配给第 i 扇门的，而其它的 $(n-1)$ 把钥匙则可以任意分配给其它的 $(n-1)$ 扇门，所以共有 $(n-1)!$ 种分配方式，即

$$n(A_i)=(n-1)! \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

类似地，有

$$n(A_i\cap A_j)=(n-2)! \quad (i<j),$$
$$n(A_i\cap A_j\cap A_k)=(n-3)! \quad (i<j<k),$$

………………

$$n(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=(n-n)!=1.$$

问题(1)就是求 $n(\overline{A}_1\cap\cdots\cap\overline{A}_n)$:

$$n(\overline{A}_1\cap\cdots\cap\overline{A}_n)=n(\overline{A_1\cup\cdots\cup A_n})=n(u)-n(A_1\cup\cdots\cup A_n)$$
$$=n(u)-S_1+S_2-S_3+\cdots+(-1)^nS_n.$$

又因为每个

$$n(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})=(n-k)! \quad (i_1<i_2<\cdots<i_k),$$

而 $A_1, \cdots, A_n$ 中不同的 $(A_{i_1}, \cdots, A_{i_k})$ $(i_1<\cdots<i_k)$ 的取法就是在 $A_1, \cdots, A_n$ 中取 k 个的取法数 C_n^k, 所以

$$S_k = C_n^k (n-k)! = n!/k!.$$

于是

$$n(\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_n) = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

$$= n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

问题(2)是求 $N_{[m]}$，由定理1可得到

$$N_{[m]} = S_m - C_{m+1}^m S_{m+1} + C_{m+2}^m S_{m+2} - \cdots + (-1)^{n-m} C_n^m S_n$$

$$= \frac{n!}{m!} - \frac{(m+1)!}{m!1!} \cdot \frac{n!}{(m+1)!} + \frac{(m+2)!}{m!2!} \cdot \frac{n!}{(m+2)!}$$

$$- \cdots + (-1)^{n-m} \frac{n!}{(n-m)!m!} \cdot \frac{n!}{n!}$$

$$= \frac{n!}{m!}\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^{n-m} \frac{1}{(n-m)!}\right).$$

归纳本节要点

最基本的关系 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$；加法原则(即 $A \cap B = \emptyset$ 的情况)，减法原则；(一般的)包含与排斥原理；推广的包含与排斥原理. 在后一种推广中用了组合变换的技巧，组合变换是在数数中广泛运用的一种数学方法.

在讨论涉及与一些具体集合有关的某个集合的数数问题时，有时可画一个文氏图以帮助思考，并很快得到结果.

习 题 4·2

1. 某班有 17 个学生，其中 5 人步行到校，7 人有自行车可用，9 人可乘汽车. 试解释这与总人数 17 人是否矛盾，为什么?
2. 在福建与广东交界处的某地，居民或说闽语或说粤语，或两种语都会说. 假设居民中 64% 会说闽语，58% 会说粤语. 问有百分之几的居民会说这两种话?
3. 若 U 为全集，$n(U)=24$, $n(A)=11$, $n(B)=7$，问 $n(A \cup B)$ 最大可取什么值?最小可取什么值?
4. 70 个学生参加体育比赛，短跑有 31 人得奖，跳高跳远有 29 人得奖，投掷有 36 人得奖，短跑与投掷两项有 12 人得奖，短跑、投掷、

跳高跳远三项有 5 人得奖，已知只获跳高或跳远奖的有 7 人，只获投掷奖的有 15 人，求

(1) 只获短跑奖的人数；

(2) 获两项奖的人数；

(3) 一项都没有得奖的人数.

5. 30 个孩子中，19 人玩过跳棋；17 人玩过象棋；10 人对这两样都玩过，且这 10 人中还有 3 人玩过围棋；5 人玩过象棋和围棋；9 人玩过跳棋和围棋. 如果已知这 30 人中每人都玩过棋，问只玩过围棋的孩子有多少人？

6. 120 人参加研究生考试. 有 47 个男学生年过 25 岁，其中有 15 人报考数学；25 岁以下报考数学者有 24 人，其中 9 个是女的；75 人年过 25 岁，其中 41 人报考数学；已知这 120 人中男的比女的多 10 人. 问其中

(1) 25 岁以下不报考数学的男学生有几人？

(2) 25 岁以下不报考数学的女学生有几人？

7. U 为全集，$n(U)=1000$, $n(A)=500$, $n(A\cap C)=200$. 试说明你能知道的关于 $n(C)$ 的一切情况.

8. 设三个英语班的人数如下表(其中 x、y、z 不清楚)：

	男的 (H)		女的 (W)	
人数	25 岁以下(L)	25 岁以上(G)	25 岁以下(L)	25 岁以上(G)
快班(F)	6	5	3	4
中班(M)	0	3	1	z
慢班(S)	10	x	5	y

已知：$n(H\cup L)=35$, $n(S\cup F)=36$, $n(G)=19$, 求 x、y、z.

第三节 占位问题

作为数数的应用，本节讨论占位问题，也就是计算把一些质点(或球)放到一些格子中的不同放法的数目. 对不同性质

的质点及不同性质的格子，得到不同放法的数目可以截然不同。在统计物理中有一些就对应于不同的统计法。

"占位"问题的笼统提法为：把 n 个质点(或球)任意放到 m 个格子中去。问有多少种不同的放法？为了能具体地数数还必须说明：这些球是不是不同的(例如有不同的颜色)；这些格子是不是不同的(例如有不同的形状或暗度)。所以，占位问题可以分成各种不同的情况。下面分段讨论。

3.1 不同的球，不同的格子

把 n 个不同的球放到 m 个不同的格子中去，计算在各种不同条件下的不同放法数，是马克斯威尔-玻尔兹曼在经典统计物理中首先研究的模型。这种模型中全部不同的放法数为 $R_m^n=m^n$(m 个匣子中可重复地取 n 个的取法就是一种不同放法)。

1. 没有空格的不同放法数(记成 $A(n, m)$)

设集合

A_i=第 i 格为空格的所有放法组成的集合，

那末

$$n(A_i)=R_{m-1}^n \quad (\text{把 } n \text{ 个不同的球放到其它 } m-1 \text{ 格中})$$

$$=(m-1)^n,$$

$$n(A_i\cap A_j)=R_{m-2}^n=(m-2)^n \quad (i\neq j),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$n(A_{i1}\cap\cdots\cap A_{ik})=R_{m-k}^n=(m-k)^n.$$

因此，
$$S_1=C_m^1(m-1)^n,$$

$$S_2=\sum_{i<j}n(A_i\cap A_j)=C_m^2(m-2)^n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_k=\sum_{i_1<\cdots<i_k} n(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})=C_m^k(m-k)^n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_m=C_m^m(m-m)^n=1.$$

于是由 2.3 定理 1 得

$$\begin{aligned}A(n, m)&=N_{[0]}(A_1, \cdots, A_m)\\&=n(U)-S_1+S_2-S_3+\cdots+(-1)^m S_m\\&=m^n-C_m^1(m-1)^n+C_m^2(m-2)^n\\&\quad-\cdots+(-1)^m C_m^m(m-m)^n\\&=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k(m-k)^n.\end{aligned}\tag{3.1}$$

2. 恰有 r 个空格的不同放法数(记成 $A_{[r]}(n, m)$)

只须在 m 个格子中任取出 $m-r$ 个格子(共 C_m^r 种取法),再把这 n 个球分配到此 $m-r$ 个格子且不许出现空格(共 $A(n, m-r)$),因此 $A_{[r]}(n, m)=C_m^r A(n, m-r)$. 还有一种略为复杂些的算法,就是利用 2.3 的定理 1 (推广的排斥和包含原理),有

$$\begin{aligned}A_{[r]}(n, m)&=N_{[r]}(A_1, \cdots, A_m)\\&=S_r-C_{r+1}^r S_{r+1}+C_{r+2}^r S_{r+2}\\&\quad-\cdots+(-1)^{m-r}C_m^r S_m\\&=C_m^r(m-r)^n-C_{r+1}^r C_m^{r+1}(m-r-1)^n\\&\quad+C_{r+2}^r C_m^{r+2}(m-r-2)^n\\&\quad-\cdots+(-1)^{m-r}C_m^r C_m^m(m-m)^n.\end{aligned}$$

由于在 $k>r$ 时,

$$\begin{aligned}C_k^r C_m^k&=\frac{k!}{r!(k-r)!}\cdot\frac{m!}{k!(m-k)!}\\&=\frac{m!}{r!(m-r)!}\cdot\frac{(m-r)!}{(k-r)!(m-k)!}=C_m^r C_{m-r}^{k-r},\end{aligned}$$

所以

$$A_{[r]}(n,\ m)=C_m^r[(m-r)^n-C_{m-r}^1(m-r-1)^n$$
$$+C_{m-r}^2(m-r-2)^n$$
$$-\cdots+(-1)^{m-r}C_{m-r}^{m-r}(m-m)^n]$$
$$=C_m^r\sum_{k=0}^{m-r}(-1)^kC_{m-r}^k(m-r-k)^n$$
$$=C_m^rA(n,\ m-r). \qquad (3.2)$$

3．有 r 个以上空格的不同放法数(记成 $A_{(r)}(n,\ m)$)

由 2.3 定理 2 可知

$$A_{(r)}(n,\ m)=N_{(r)}(A_1,\ \cdots,\ A_m)$$
$$=S_r-C_r^{r-1}S_{r+1}+C_{r+1}^{r-1}S_{r+2}$$
$$-\cdots+(-1)^{m-r}C_{m-1}^{r-1}S_m$$
$$=C_m^r(m-r)^n-C_r^{r-1}C_m^{r+1}(m-r-1)^n$$
$$+C_{r+1}^{r-1}C_m^{r+2}(m-r-2)^n$$
$$-\cdots+(-1)^{m-r}C_{m-1}^{r-1}C_m^m(m-m)^n.$$

但是当 $k\geqslant r$ 时，

$$C_k^{r-1}C_m^{k+1}=\frac{k!}{(r-1)!(k-r+1)!}\cdot\frac{m!}{(k+1)!(m-k-1)!}$$
$$=\frac{m!}{(r-1)!}\cdot\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{(k-r+1)!(m-k-1)!}$$
$$=\frac{r}{k+1}\cdot\frac{m!}{r!(m-r)!}$$
$$\cdot\frac{(m-r)!}{[m-(k+1)]![(k+1)-r]!}$$
$$=\frac{r}{k+1}C_m^rC_{m-r}^{k+1-r}.$$

因此，

$$A_{(r)}(n,\ m)=rC_m^r\Big[\frac{1}{r}(m-r)^n-\frac{1}{r+1}C_{m-r}^1(m-r-1)^n$$

$$+\frac{1}{r+2}C_{m-r}^2(m-r-2)^n$$

$$-\cdots+(-1)^{m-r}\frac{1}{m}C_{m-r}^{m-r}(m-m)^n\Big]$$

$$=rC_m^r\sum_{k=r}^{m}\frac{(-1)^{k-r}}{k}C_{m-r}^k(m-k)^n. \qquad (3.3)$$

[**注意** $A_{(r)}(n,m)$也可写成别的形式,例如$\sum\limits_{k=r}^{m-1}C_m^kA(n,m-k)$.]

4．某指定格中恰有 r 个球的不同放法数

设第 i 格中恰有 r 个球的不同放法的全体组成集合 B_i^r. 为了得到符合 B_i^r 的放法,需要在这 n 个球中选出 r 个放在第 i 格(一共有 C_n^r 个不同选法), 再把余下的 $n-r$ 个球放在其它的 $m-1$ 格(一共有 $R_{m-1}^{n-r}=(m-1)^{n-r}$ 种不同放法), 所以总的不同放法数为 $C_n^r(m-1)^{n-r}$, 即

$$n(B_i^r)=C_n^r(m-1)^{n-r}.$$

当然, 也可以求"恰有 S 格其中每格恰有 r 个球"的不同放法数,或"至少有 S 格其中每格恰有 r 个球"的不同放法数. 但是计算更为繁琐. 所以就不讨论了.

5．某指定格不空(其它格不管空不空)的不同放法数

设第 i 格不空的不同放法的全体组成一个集合 B_i. 那末

$$B_i=B_i^1\cup B_i^2\cup\cdots\cup B_i^n.$$

其中 B_i^1, B_i^2, $\cdots$, B_i^n 如上一段中所定义的,且两两互不相容. 所以

$$n(B_i)=n(B_i^1)+\cdots+n(B_i^n)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}C_n^k(m-1)^{n-k}.$$

6．某指定的 r 格不空(其它格不管空不空)的不同放法数

使第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 格不空(其它格不管空不空)的不同放法的全体组成的集合恰为

$$B_{i1}\cap B_{i2}\cap\cdots\cap B_{ir}.$$

符合这个集合的条件的放法必须通过以下 $n-r+1$ 种不同的情况达到:

第 1 种情况: 这 r 格中恰有 r 个球.

第 2 种情况: 这 r 格中恰有 $r+1$ 个球.

……

第 l 种情况: 这 r 格中恰有 $r+l-1$ 个球.

……

第 $n-r+1$ 种情况: 这 r 格中恰有 n 个球.

其中每种情况是通过三个步骤达到的, 例如有 k 个球的情况的三个步骤分别为: 第一步: 在 n 个球中选取 k 个, 选法数为 C_n^k; 第二步: 把这 k 个球放到这 r 个格子中($k\geqslant r$), 且不许出现空格, 放法数为 $A(k, r)$(计算公式见第 1 段); 第三步: 把余下的 $n-k$ 个球任意放到余下的 $m-r$ 格中去, 放法数为 $R_{m-r}^{n-k}=(m-r)^{n-k}$. 所以由乘法原则: 本情况的不同放法数为 $C_n^kA(k, r)(m-r)^{n-k}$. 再用加法原则, 可知

$$n(B_{i1}\cap B_{i2}\cap\cdots\cap B_{ir})=\sum_{k=r}^{n}C_n^kA(k, r)(m-r)^{n-k}.$$

这就是某指定的 r 格不空的不同放法数.

7. 某指定的 r 格中有总和恰为 l 个(球)的不同放法数为: $C_n^lR_r^lR_{m-r}^{n-l}=C_n^lr^l(m-r)^{n-l}$.

8. 第 1 格有 n_1 个球、第 2 格有 n_2 个球、……、第 m 格有 n_m 个球($n_1+\cdots+m_m=n$)的不同放法数为

$$C_n^{n_1, n_2, \cdots, n_m}.$$

9. 有一格有 n_1 个球、一格有 n_2 个球、……、一格有 n_m

个球的不同放法数

设 $n_1, \cdots, n_m$ 中有 r_1 个 n_1，r_2 个 n_2，…，r_l 个 n_l（$n_1, \cdots, n_l$ 两两不同，$r_1+\cdots+r_l=m$，$r_1n_1+\cdots+r_ln_l=n_1+\cdots+n_m=n$），那末符合条件的放法可由两个步骤实现：第一步，在 m 个格子中分出 r_1 个，准备各放 n_1 个球；分出 r_2 个，准备各放 n_2 个球，……，分出 r_l 个，准备各放 n_l 个球，不同的分法数为 $C_m^{r_1,\cdots,r_l}$；第二步：在 n 个球中取出 r_1 组各有 n_1 个球，r_2 组各有 n_2 个球，……，r_l 组各有 n_l 个球分别放到前面的格子中去，不同放法数为 $C_n^{n_1,\cdots,n_m}$. 所以本段所要求的不同放法数为

$$C_m^{r_1,\cdots,r_l}C_n^{n_1,\cdots,n_m}.$$

特别，如果 $n_1, \cdots, n_m$ 两两不相等，那末上式化简为

$$m!\,C_n^{n_1,\cdots,n_m}.$$

以上这些公式虽然较繁，但是对具体的情况（给定了 n, m, r, n_1, …, n_m, …等）总可以由计算器进行计算而得到结果.

另一方面，在理论上也可以通过解析数学的方法来求这些公式在 n 或 m 很大时的近似表达式（叫做渐近公式）. 这里就不讨论了.

3.2 相同的球，不同的格子

把 n 个相同的球放到 m 个不同的格子中去，计算在各种不同条件下的不同放法数，这是波色-爱因斯坦的量子统计法中运用的模型. 在这种模型中，全部的不同放法数为 C_{n+m-1}^{m-1}（即 $m-1$ 个相同的隔板与 n 个相同的球的不同排列数——参见第一节）.

1′. 没有空格的外观看起来不同放法数（记为 $A'(n, m)$，设 $n>m$）

由于所有的球是相同的，所以可先在各格放一个球，再把余下的 $n-m$ 个球分配到 m 格中去，外观看起来，不同的放法数为 $C_{(n-m)+m-1}^{m-1}$。于是

$$A'(n, m)=C_{(n-m)+m-1}^{m-1}=C_{n-1}^{m-1}.$$

2′. 恰有 r 个空格的外观看起来不同的放法数［记成 $A'_{[r]}(n, m)$］

恰有 r 个空格可以分两个步骤实现：第一步，在 m 个格中任取 r 个作为空格，不同取法数为 C_m^r；第二步，把 n 个球放到余下的 $m-r$ 格中但不许出现空格，从外表看起来，不同的放法数按 1′ 应为 C_{n-1}^{m-r-1}。由乘法原则得到

$$A'_{[r]}(n, m)=C_m^r C_{n-1}^{m-r-1}.$$

3′. 有 r 个以上空格的外观看起来不同的放法数（记为 $A'_{(r)}(n, m)$）

由 2.3 定理 2 可知

$$A'_{(r)}(n, m)=\sum_{k=r}^{m-1} A'_{[k]}(n, m)=\sum_{k=r}^{m-1} C_m^k C_{n-1}^{m-k-1}.$$

4′. 某指定格中恰有 r 个球的外观看起来不同的放法数

设第 i 格中恰有 r 个球的外观看起来不同的全体放法组成的集合为 B_i^r. 为了得到符合 B_i^r 的放法，只需把其它 $n-r$ 个球放到其余的 $m-1$ 格中去就行了. 这时外观不同的放法数为 $C_{(n-r)+(m-1)-1}^{(m-1)-1}=C_{n+m-r-2}^{m-2}$。所以

$$n(B_i^r)=C_{(n-r)+(m-2)}^{m-2}.$$

5′. 某指定格不空（其它格不管空不空）的外观看起来不同的放法数

设第 i 格不空的外观看起来不同的放法全体组成一个集合 B_i. 注意球都相同，为了得到符合 B_i 的放法只须先在第 i 格中放进一个球，再把其它 $n-1$ 个球放到这 m 格（包括第 i

格）中去，不同放法数为 $C_{(n-1)+m-1}^{m-1}$. 所以

$$n(B_i)=C_{n+m-2}^{m-1}.$$

6′. 某指定的 r 格不空（其它格不管空不空）的外观看起来不同的放法数

设指定的 r 个格为 $i_1, \cdots, i_r$, 为了符合 $B_{i1}\cap\cdots\cap B_{ir}$,（并考虑到所有的球无区别）只须先在这 r 个格中各放一球，再把其它的 $n-r$ 个球任意放到原来的 m 个格（包括指定的 r 个格）中，不同的放法的数目为 $C_{(n-r)+m-1}^{m-1}$. 所以

$$n(B_{i1}\cap\cdots\cap B_{ir})=C_{n-r+m-1}^{m-1}.$$

7′. 某指定 r 格中有总和恰为 l 个（球）的外观看起来不同的放法数为

$$C_{l+r-1}^{r-1}\cdot C_{(n-l)+(m-r)-1}^{(m-r)-1},$$

其中前一因子表示把 l 个球放到 r 个格子中的放法数，后一因子表示把留下的 $n-l$ 个球放到其它 $m-r$ 个格子中的放法数（又因为球都是相同的，所以前面不需象 3.1 第 7 中那样再乘因子 C_n^l）.

8′. 第 1 格有 n_1 个球，第 2 格有 n_2 个球，……，第 m 格有 n_m 个球 $(n_1+\cdots+n_m=n)$ 的外观看起来不同的分法数为 1（因为球都相同）.

9′. 有一格有 n_1 个球，一格有 n_2 个球，……，一格有 n_m 个球的外观看起来不同的放法数

设 $n_1, \cdots, n_m$ 中有 r_1 个 n_1, r_2 个 n_2, $\cdots$, r_l 个 n_l, 其中 $n_1, \cdots, n_l$ 两两不同 $(r_1+\cdots+r_l=m,\ r_1n_1+\cdots+r_ln_l=n_1+\cdots+n_m=n)$, 则符合要求条件的一种不同放法就对应于把 m 个格子分成 l 组（第 1 组 r_1 个格每格准备放 n_1 个球，……，第 l 组 r_l 个格每格准备放 n_l 个球），不同的分法数为 $C_m^{r_1,\cdots,r_l}$. 所以本段要求计算的数目为 $C_m^{r_1,\cdots,r_l}$.

注 比较3.1与3.2，可以看到：由于球从不同变成了相同，在求$n(U)$时，3.2比3.1略为复杂，但是在求其它各种数数的情况中，3.2常比3.1简单．原因在于在3.1中球都不同，因此不仅要考虑每个格中有多少个球，而且还要考虑是哪几个球．在数数时，为了避免数重，常常需要用到排斥与包含原理．但是在3.2中由于球相同，故能避免用排斥与包含原理，采取直接的简捷计算而获得结果．

3.3 相同的球，不同的格子，且每格不许超过一个球(排斥性)

把n个相同的球放到m个不同的格子中去，但每格不能超过一个球($n<m$)．计算在各种不同条件下的不同放法数，这是费米-狄拉克的量子统计法中运用的模型．在这种模型中，全部的不同放法数为C_m^n(即从m格中取出放球的n格)．在这种模型中，除下述提法外，都没有意义．

5″．某指定格不空的不同放法数为

C_{m-1}^{n-1} (先放一个在该格，再把$n-1$个球放到其余$m-1$格中去)；

6″．某指定的r格不空的不同放法数为

C_{m-r}^{n-r} (先在这指定的r格中各放一球，再把余下的$n-r$个球放到其它$m-r$格中去)；

7″．某指定r格中有总和恰为l个球的不同放法数为($l\leqslant r$, $n-l\leqslant m-r$, $n<m$)

$C_r^l C_{m-r}^{n-l}$ (把l个球分在指定的r格中，再把余下的$n-l$个球放到其它$m-r$格中去)．

*3.4 相同的球，相同的格子

n个相同的球放到m个相同的格子中去，问外观看起来不同的分法数有多少？

设此分法数为 $f_m(n)$，“把 n 个相同的球放到 m 个相同的格子中去外观看起来不同的全部放法所组成的集合为 $A_{n,m}$，那末

$$f_m(n)=n(A_{n,m}).$$

符合 $A_{n,m}$ 条件的放法可分为下列各种情形：

各格子中所放球的最小数为 0. 这就是说至少有一格是空的，但由于格子是相同的，所以此时外观不同的放法就相当于把 n 个球放到其余 $m-1$ 个格中去的放法，其数即是 $n(A_{n,m-1})=f_{m-1}(n)$.

各个格子中所放球的最小数为 1. 这时可以先在各格子中放一个球，再把其它的 $n-m$ 个球放到这 m 个格中去，而且要求每格所放球的最小数为 0. 由上一种情形的讨论可知：外观不同的放法数为 $f_{m-1}(n-m)$.

各个格子中所放球的最小数为 2. 这时可以先在各格子中放 2 个球，再把其它的 $n-2m$ 个球放到这 m 个格中去，而且要求每格所放球的最小数为 0. 由第一种情形的讨论可知，外观不同的放法数为 $f_{m-1}(n-2m)$.

……

各个格子中所放球的最小数为 k, …, 类似地可算得此时外观不同的放法数为 $f_{m-1}(n-km)$.

……

各个格子中所放球的最小数为 $\left[\frac{n}{m}\right]$（其中 $\left[\frac{n}{m}\right]$ 表示 $\frac{n}{m}$ 的整数部分，即不大于 $\frac{n}{m}$ 的最大整数），则外观不同的放法数为 $f_{m-1}\left(n-\left[\frac{n}{m}\right]m\right)$.

综合以上各种情形，用数数的加法原理可得

$$f_m(n)=f_{m-1}(n)+f_{m-1}(n-m)+\cdots+f_{m-1}(n-km)$$
$$+\cdots+f_{m-1}\left(n-\left[\frac{n}{m}\right]m\right).$$

这是一个递推公式. 给定了 n 后可以从 $m=1$ 开始起算并逐步加大 m. 从而得

$$f_1(n)=1,$$
$$f_2(n)=f_1(n)+f_1(n-2)+f_1(n-4)+\cdots+f_1\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]2\right)$$
$$=\left[\frac{n}{2}\right]+1=\left[\frac{n+2}{2}\right]$$

$\left(\text{注意每项的值都是1，一共}\left[\frac{n}{2}\right]+1\text{ 项}\right)$,

$$f_3(n)=f_2(n)+f_2(n-3)+f_2(n-6)+\cdots+f_2\left(n-\left[\frac{n}{3}\right]3\right)$$
$$=\left[\frac{n+2}{2}\right]+\left[\frac{n-3+2}{2}\right]+\left[\frac{n-6+2}{2}\right]$$
$$+\cdots+\left[\frac{n-\left[\frac{n}{3}\right]3+2}{2}\right]=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]}\left[\frac{n-3k+2}{2}\right],$$
$$f_4(n)=\cdots.$$

给定了 n 和 m，利用计算器就可以逐步算出 $f_m(n)$.

例如，$f_m(n)$ 的表(m, $n\leqslant 7$)：

格　数　m	球		数		n		
	1	2	3	4	5	6	7
	$f_m(n)$						
2	1	2	2	3	3	4	4
3	1	2	3	4	5	7	8
4	1	2	3	5	6	9	11
5	1	2	3	5	7	10	13
6	1	2	3	5	7	11	14
7	1	2	3	5	7	11	15

由这个表也可以看到：$f_m(n)$ 极不规则，因而也就很少有可能得到更好的计算公式.

如果还要求无空格，则不同放法数为 $f_m(n-m)$.

3.5 不同的球，不同的格子，而且在同一格中的球排了次序(带有序排列的占位问题)

n 个不同的球任意放在 m 个不同的格中，而且放在同一个格子中的球也排成一排，所有外观看起来不同的放法和排法都认为是不同的．问不同排放的总数有多少？

设这种不同排放的总数为$[m]^n$. 为了得到这些不同排放的总数，只需计算经过两个步骤的排放：第一步，不计这n个球的差别，任意地放到这m个格子中去，不同的放法有C_{n+m-1}^{m-1}种(见3.2)；第二步，再考虑这n个球的次序，不同的排法共有$n!$种. 因此总的不同的排放数为

$$n!C_{n+m-1}^{m-1}=\frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}\cdot n!$$
$$=(n+m-1)(n+m-2)\cdots(m+1)m,$$

所以

$$[m]^n=m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1). \qquad (3.4)$$

把这种情形与3.1中的模型对比，可看出，本节只是比3.1多要求了球在格中考虑次序这件事. 在3.1中不同放法的总数为

$$m^n=m\cdot m\cdot m\cdots m \quad (n\text{个相乘}).$$

如今的不同排放法的总数为(当然多些)

$$[m]^n=m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)$$
$$(n\text{项相乘但每次增加}1),$$

(记号$[m]^n$有一点象"幂"，但乘的因数每次增加1).

3.6 不同的球，相同的格子(对应于分类问题)

n个不同的球任意放进m个外表完全相同的格子中去，问外观看起来不同的放法有多少种？在不许出现空格时，这个问题等同于把n个球分成m类的不同分法数.

先考虑不许出现空格的情形：设这时不同的放法数为$B(n, m)$，那末显然有

$A(n, m)=B(n, m)m!$ （$A(n, m)$见3.1第1条)

因此

$$B(n, m)=\frac{A(n, m)}{m!}. \tag{3.5}$$

其次,对一般的情形(允许有空格情形).可按空格的个数分情况,空格为 k 个的放法数为 $\frac{A(n, m-k)}{(m-k)!}$. 所以总的不同放法数为

$$\frac{A(n, m)}{m!}+\frac{A(n, m-1)}{(m-1)!}+\cdots+\frac{A(n, 1)}{1!}. \tag{3.6}$$

习 题 4·3

1. 求分别在3.1及3.2的情况下,某指定 r 格为空的不同放法数.
2. 试证明

$$C_m^0C_{n+m-1}^{m-1}-C_m^1C_{n+m-2}^{m-2}+\cdots+(-1)^kC_m^kC_{n+m-(k+1)}^{m-(k+1)}$$
$$+\cdots+(-1)^{m-1}C_m^{m-1}C_n^0=C_{n-1}^{m-1}.$$

   [提示: 用排斥和包含原理计算 3.2 中的 1′, 并与 1′ 中已得的结果作比较.]
3. 仿照 3.1 中 5 的办法求 3.2 中的 5′, 看看能得到什么样的恒等式.
4. 求分别在 3.1, 3.2, 3.3 诸情况下指定的 r 个格中恰有 r_1 个空格的外观不同的放法数.
5. 试证明 $m^n=\sum_{k=0}^{m}C_m^kA(n, k).$

   [提示: 用组合变换的逆转公式.]

第四节　常见的数数方法

第三节介绍了给定一个问题后如何用各种方法数数. 本节介绍一些常见的方法. 作为应用这些方法的例子, 并讨论一些有关的问题.

4.1 递推法

在第二章中我们曾经提到过递推公式. 递推法就是想办法导出所数数的递推公式. 如有可能, 还进而推出表达数数的公式.

【例 1】 直接从 D_n^m 的定义建立它的递推公式, 从而导出 D_n^m 的公式, 其方法如下:

D_n^m 是 n 个号码不同的球"1", "2", …, "n" 中可重复地选取 m 个的组合数. 计算这个组合数可以分下列 $m+1$ 种不同情形:

第 1 种情形: "1" 号球不出现, 这时不同的组合数为 D_{n-1}^m (在其它 $n-1$ 种球中取 m 个);

第 2 种情形: "1" 号球出现一次, 这时不同的组合数为 D_{n-1}^{m-1}(在其它 $n-1$ 种球中取 $m-1$ 个);

……

第 $k+1$ 种情形: "1" 号球出现 k 次, 这时不同的组合数为 D_{n-1}^{m-k}(在其它 $n-1$ 种球中取 $m-k$ 个);

……

第 $m+1$ 种情形: "1" 号球出现 m 次, 这时不同的组合数为 D_{n-1}^0 (在其它 $n-1$ 种球中取 0 个).

于是由数数的加法原则得到递推公式为

$$D_n^m = D_{n-1}^m + D_{n-1}^{m-1} + D_{n-1}^{m-2} + \cdots + D_{n-1}^0.$$

显然, 不论什么 m, 都有

$$D_1^m = 1.$$

于是由递推公式可知

$$D_2^m = D_1^m + D_1^{m-1} + \cdots + D_1^0 = m+1,$$

$$D_3^m=D_2^m+D_2^{m-1}+\cdots+D_2^0$$
$$=(m+1)+m+(m-1)+\cdots+1=\frac{(m+2)(m+1)}{2}$$
$$=C_{m+2}^2,$$
$$D_4^m=D_3^m+D_3^{m-1}+\cdots+D_3^0=C_{m+2}^2+C_{m+1}^2+\cdots+C_2^2$$
$$=C_{m+2}^2+C_{m+1}^2+\cdots+C_3^2+C_2^2$$
$$=C_{m+2}^2+C_{m+1}^2+\cdots+(C_3^2+C_3^3)$$
$$=C_{m+2}^2+C_{m+1}^2+\cdots+C_4^3$$
$$=C_{m+2}^2+C_{m+1}^2+\cdots+C_4^2+C_4^3$$
$$=C_{m+2}^2+C_{m+1}^2+\cdots+C_5^3$$
$$=C_{m+2}^2+C_{m+1}^2+\cdots+C_5^2+C_5^3=\cdots$$
$$=C_{m+2}^2+C_{m+2}^3=C_{m+3}^3,$$

现在我们已经可以估到 D_n^m 应该为 C_{m+n-1}^{m-1}. 今用数学归纳法证明

$$D_n^m=C_{m+n-1}^{n-1}.$$

显然, $n=1$ 时公式是正确的(两边都是 1). 设 $n=k$ 时公式正确:

$$D_k^m=C_{m+k-1}^{k-1}.$$

那末在 $n=k+1$ 时, 根据递推公式, 有

$$D_{k+1}^m=D_k^m+D_k^{m-1}+\cdots+D_k^0$$
$$=C_{m+k-1}^{k-1}+C_{m+k-2}^{k-1}+\cdots+C_{k+1}^{k-1}+C_k^{k-1}+C_{k-1}^{k-1}$$
$$=C_{m+k-1}^{k-1}+C_{m+k-2}^{k-1}+\cdots+C_{k+1}^{k-1}+(C_k^{k-1}+C_k^k)$$
$$=C_{m+k-1}^{k-1}+C_{m+k-2}^{k-1}+\cdots+C_{k+1}^{k-1}+C_{k+1}^k$$
$$=C_{m+k-1}^{k-1}+C_{m+k-2}^{k-1}+\cdots+C_{k+2}^k=\cdots\cdots$$
$$=C_{m+k-1}^{k-1}+C_{m+k-1}^k=C_{m+k}^k.$$

可见 $n=k+1$ 时，公式仍正确．由数学归纳法原理可知：对一切 n，均有

$$D_n^m=C_{m+n-1}^{n-1}.$$

这种方法的优点是它有典型性，程序清楚，技巧性要求不高，易于普及．

【例 2】 从 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中，任意选 m 个数（不可重复），问其中无二个相邻的不同选法有多少种？

解：把这种不同选法的总数记为 $g_m(n)$．符合这种条件的选法可分两种情形：第一种情形是“1”在被选上之列，那末其它的 $m-1$ 个元素必须在 $\{3, 4, \cdots, n\}$ 这 $n-2$ 个数中选，且仍要求不能有相邻的数，它们的不同选法数为 $g_{m-1}(n-2)$；第二种情形是“1”不在被选之列，那末 m 个数必须在 $\{2, 3, \cdots, n\}$ 这 $n-1$ 个数中选，而且仍要求不能有相邻的数，其不同选法数为 $g_m(n-1)$．由数数的加法原则，可得总的不同选法数应为 $g_{m-1}(n-2)+g_m(n-1)$．因此得到递推公式

$$g_m(n)=g_{m-1}(n-2)+g_m(n-1).$$

现在进一步找 $g_m(n)$ 的表达公式．显然，对任何 n，均有

$$g_1(n)=n.$$

于是由上述递推公式及显然的关系 $g_2(2)=0$ 可知

$$\begin{aligned}
g_2(n)&=g_1(n-2)+g_2(n-1)\\
&=g_1(n-2)+g_1(n-3)+g_2(n-2)=\cdots\cdots\\
&=g_1(n-2)+g_1(n-3)+\cdots+g_1(1)+g_2(2)\\
&=(n-2)+(n-3)+\cdots+1\\
&=\frac{(n-1)(n-2)}{2}=C_{n-1}^2 \quad (n-1\geqslant 2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g_3(n) &= g_2(n-2)+g_3(n-1)\\
&= g_2(n-2)+g_2(n-3)+g_3(n-2)\\
&= \cdots\cdots\\
&= g_2(n-2)+g_2(n-3)+\cdots+g_2(3)+g_3(4)\\
&= g_2(n-2)+g_2(n-3)+\cdots+g_2(3) \quad (\because g_3(4)=0)\\
&= C_{n-3}^2+C_{n-4}^2+\cdots+C_2^2\\
&= C_{n-2}^3 \quad (\text{与例 1 类似地推导})\ (n-2\geqslant 3).
\end{aligned}
$$

对一般的 m，可以用数学归纳法证明

$$g_m(n)=C_{n-(m-1)}^m=C_{n-m+1}^m.$$

【例 3】 n 个不同文字 $a_1, \cdots, a_n$ 的一个排列如果满足：对一切 $1\leqslant i\leqslant n$ 均有 a_i 不在第 i 个位置上，则称为禁忌排列。求这 n 个不同文字的全部禁忌排列的数目。

解：设 n 个不同文字 $a_1, \cdots, a_n$ 的全体不同的禁忌排列数为 D_n。为了得到禁忌排列，只须通过两个步骤：第一步是选取第一个位置上的数，它除 a_1 外均允许，共有 $n-1$ 种不同选法；第二步是选取其它位置上的数，又可分两种不同的情形。不妨假定已选的第一个位置上的数为 $a_k(k\neq 1)$。第一种情形是在第 k 个位置上选到的不是 a_1，这就是说，在位置 $2, \cdots, k-1, k, k+1, \cdots, n$ 上分别各不允许出现 $a_2, \cdots, a_{k-1}, a_1, a_{k+1}, \cdots, a_n$，这是 $n-1$ 个文字的禁忌排列问题（只是 a_1 的禁忌位置变成了 k），不同的禁忌排列数为 D_{n-1}；第二种情形是在第 k 个位置上为 a_1，那末其它 $n-2$ 个文字分别不能在它们原有的禁忌位置上出现，所以这是 $n-2$ 个文字的禁忌排列问题，其禁忌排列数为 D_{n-2}。综上讨论结果，利用加法原则与乘法原则可知：n 个文字的禁忌排列数应为

$$(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2}).$$

从而得到递推公式为

$$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2}).$$

而且显然还有

$$D_1=0,\ D_2=1,\ D_3=2.$$

我们改写递推式为

$$D_n-nD_{n-1}=-(D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}),$$

令 $$x_n\equiv D_n-nD_{n-1},$$

于是 $$x_2=D_2-2D_1=1,\quad x_n=-x_{n-1}.$$

因此 $$x_n=(-1)^n.$$

所以

$$\begin{aligned}D_n&=x_n+nD_{n-1}=(-1)^n+nD_{n-1}\\&=(-1)^n+n[(-1)^{n-1}+(n-1)D_{n-2}]\\&=(-1)^n+n(-1)^{n-1}+n(n-1)D_{n-2}=\cdots\cdots\\&=(-1)^n+n(-1)^{n-1}+n(n-1)(-1)^{n-2}\\&\quad+\cdots+n(n-1)\cdots3(-1)^2+n(n-1)\cdots2D_1\\&=n!\left[\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+\frac{1}{2!}\right]\\&=n!\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right].\end{aligned}$$

【例 4】 3.1 中的 $A(n,\ m)$ 的表达式是用排斥和包含原则推导的. 为了说明递推法的用途，这里用递推法重新将它推导一次.

把 n 个不同的球放到 $m+1$ 个不同的格中去，且要求没有空格，完成这件事可以分成下列数种情形:

第 $m+1$ 格中只有 1 个球(C_n^1 种取法)，其它 m 格中放余下的 $n-1$ 个球且不出现空格. 不同放法数为 $C_n^1A(n-1,\ m)$;

第 $m+1$ 格中有 2 个球(C_n^2 种取法)，其它 m 格中放余下

的 $n-2$ 个球且不出现空格．不同放法总数为 $C_n^2A(n-2, m)$；

……

第 $m+1$ 格中有 $n-m$ 个球(C_n^{n-m} 种取法)，其它 m 格中放余下的 m 个球且不出现空格．不同放法数为 $C_n^{n-m}A(m, m)$。

按数数的加法原则总的不同的放法数为

$$C_n^1A(n-1, m)+C_n^2A(n-2, m)+\cdots+C_n^{n-m}A(m, m).$$

因此，我们得到递推公式

$$A(n, m+1)=\sum_{k=1}^{n-m}C_n^kA(n-k, m).$$

下面从这个递推公式出发推导 $A(n, m)$ 的表达式．显然 n 个球放入一格只有一种放法，即

$$A(n, 1)=1.$$

由递推公式可知

$$A(n, 2)=\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k-2C_n^0$$

$$=2^n-2\quad\left(\text{注意}\sum_{k=0}^{n}C_n^k=(1+1)^n=2^n\right).$$

于是

$$A(n, 3)=\sum_{k=1}^{n-2}C_n^k(2^{n-k}-2)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k2^{n-k}-C_n^02^n-C_n^{n-1}2-C_n^n-2\sum_{k=1}^{n-2}C_n^k$$

$$=2^n\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k-2^n-2C_n^{n-1}-1$$

$$-2\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k-C_n^0-C_n^{n-1}-C_n^n\right)$$

$$=2^n\left(1+\frac{1}{2}\right)^n-2^n-2C_n^{n-1}-1-2(2^n-2-C_n^{n-1})$$

$$=3^n-3\cdot 2^n+3.$$

再看一个 $A(n, 4)$，以便能总结出一般的规律：

$$A(n,\ 4)=\sum_{k=1}^{n-3}C_n^k A(n-k,\ 3)$$

$$=\sum_{k=1}^{n-3}C_n^k(3^{n-k}-3\cdot 2^{n-k}+3)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(3^{n-k}-3\cdot 2^{n-k}+3)-C_n^0(3^n-3\cdot 2^n+3$$

$$-C_n^{n-2}(3^2-3\cdot 2^2+3)-C_n^{n-1}(3-3\cdot 2+3)$$

$$-C_n^n(1-3+3)$$

$$=3^n\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{1}{3}\right)^k-3\cdot 2^n\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$+3\sum_{k=0}^{n}C_n^k-C_n^0(3^n-3\cdot 2^n+3)-C_n^n$$

$$=3^n\left(1+\frac{1}{3}\right)^n-3\cdot 2^n\left(1+\frac{1}{2}\right)^n$$

$$+3\cdot 2^n-3^n+3\cdot 2^n-3-1$$

$$=4^n-4\cdot 3^n+6\cdot 2^n-4.$$

从上面得到的 $A(n,\ 2)$, $A(n,\ 3)$, $A(n,\ 4)$ 的表达式可以大胆地猜想：可能存在一些常数 $C_1,\ \cdots,\ C_{n-1}$, 使

$$A(n,\ m)=m^n-C_1(m-1)^n+C_2(m-2)^n-C_3(m-3)^n$$
$$+\cdots+(-1)^{m-1}C_{m-1}\cdot 1^n.$$

为了更容易比较，令 $C_0=C_m=1$, 那末

$$A(n,\ m)=C_0m^n-C_1(m-1)^n+C_2(m-2)^n$$
$$-\cdots+(-1)^{m-1}C_{m-1}\cdot 1^n+(-1)^mC_m\cdot 0^n.$$

怎样猜出这些 $C_1,\ \cdots,\ C_{m-1}$ 呢？就需要对 $m=2,\ 3,\ 4$ 进行分析推测．注意到

	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
$m=2$	1	2	1		
$m=3$	1	3	3	1	
$m=4$	1	4	6	4	1

所以这些 C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 恰好是组成一个杨辉三角形的数：

	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
$m=2$	C_2^0	C_2^1	C_2^2		
$m=3$	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3	
$m=4$	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4

因而可以猜测一般的结论为：

对于一般 m，应有

$$C_0=C_m^0,\ C_1=C_m^1,\ \cdots,\ C_k=C_m^k,\ \cdots,\ C_m=C_m^m.$$

也就是说，得到一个确切的猜想：

$$A(n,\ m)=C_m^0m^n-C_m^1(m-1)^n+C_m^2(m-2)^n-\cdots+(-1)^mC_m^m(m-m)^n,$$

即

$$A(n,\ m)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_m^k(m-k)^n.$$

但是以上的归纳是不完全归纳．为了严格论证上述公式确实是对的，还需要用数学归纳法证明它．利用 $A(n,\ m+1)$ 的递推公式就可以完成数学归纳法的证明，这一证明留给读者完成．

【例 5】(斯特林数)　令

$$(t)_n=\underbrace{t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)}_{n\text{ 项递减数的乘积}},\tag{4.1}$$

$$(t)_0=1.$$

那末 $(t)_n$ 是 t 的 n 阶多项式，其中 t^k 的系数记为 $s(n,\ k)$，称第一类斯特林数，具体地说，就是

$$(t)_n=\sum_{k=0}^{n}s(n,\ k)t^k.\tag{4.2}$$

反过来，t^n 也可以写成一些系数乘以 $(t)_k$，然后求和，这些系数称为第二类斯特林数，记为 $S(n, k)$，也就是说

$$t^n=\sum_{k=0}^{n} S(n, k)(t)_k. \tag{4.3}$$

下面推导两类斯特林数的递推公式：

显然，　　　　$s(n, n)=1$，　$S(n, n)=1$；

$s(n, 0)=0$，$S(n, 0)=0$ （$n>0$ 时，t^n、$(t)_n$ 都无常数项）.

由 $(t)_n$ 的递推公式

$$(t)_{n+1}=(t)_n(t-n) \tag{4.4}$$

可知：

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} s(n+1, k)t^k &= (t)_{n+1}=(t)_n(t-n)\\ &=\sum_{k=0}^{n} s(n, k)t^k(t-n)\\ &=\sum_{k=0}^{n} s(n, k)t^{k+1}-\sum_{k=0}^{n} ns(n, k)t^k\\ &=\sum_{k'=1}^{n+1} s(n, k'-1)t^{k'}\\ &\quad -\sum_{k=0}^{n} ns(n, k)t^k \quad (k'=k+1).\end{aligned}$$

于是对 $0<k<n+1$，有

$$\begin{cases} s(n+1, k)=s(n, k-1)-ns(n, k), \\ s(n, 0)=0 \quad (n>0), \ s(n, n)=1. \end{cases} \tag{4.5}$$

这就是第一类斯特林数的递推公式. 由它可以从小的 n 开始起算，逐步增大 n 的值，计算相应的 $s(n, k)$.

另一方面，由 t^n 的递推公式

$$t^{n+1}=t\cdot t^n \quad 及 \quad (t-k)(t)_k=(t)_{k+1}$$

可知

$$\sum_{k=0}^{n+1} S(n+1, k)(t)_k = t^{n+1} = t\cdot t^n$$

$$= t\sum_{k=0}^{n} S(n, k)(t)_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} S(n, k)(t)_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} S(n, k)k(t)_k$$

$$= \sum_{k'=1}^{n+1} S(n, k'-1)(t)_{k'} + \sum_{k=0}^{n} kS(n, k)(t)_k$$

于是对 $0<k<n+1$, 有递推式

$$\begin{cases} S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k), \\ S(n, n) = 1, \quad S(n, 0) = 0 \quad (n>0), \\ S(0, 0) = 1. \end{cases} \tag{4.6}$$

斯特林数是组合分析中常见的，下面分析一下它的组合含义：

先从一个函数的差分出发，若设

$$\Delta_t f(x) \equiv f(x+t) - f(x),$$

$$\Delta_t^2 f(x) \equiv \Delta_t f(x+t) - \Delta_t f(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta_t^{k+1} f(x) \equiv \Delta_t^k f(x+t) - \Delta_t^k f(x).$$

那末

$$\Delta_t^2 f(x) = \Delta_t f(x+t) - \Delta_t f(x)$$

$$= [f(x+2t) - f(x+t)] - [f(x+t) - f(x)]$$

$$= f(x+2t) - 2f(x+t) + f(x),$$

$$\Delta_t^3 f(x) = \Delta_t^2 f(x+t) - \Delta_t^2 f(x)$$
$$= [f(x+3t) - 2f(x+2t) + f(x+t)]$$
$$- [f(x+2t) - 2f(x+t) + f(x)]$$
$$= f(x+3t) - 3f(x+2t) + 3f(x+t) - f(x).$$

从上面的结论可以看出：$\Delta_t^k f(x)$ 象是由 $f(x+kt)$，$-f[x+(k-1)t]$，$f[x+(k-2)t]$，$-f[x+(k-3)t]$，… 分别乘以一些系数然后再求和所得．而这些系数为

$k=2$ 时：1，2，1；

$k=3$ 时：1，3，3，1；

………………

这就使人联想到杨辉三角形，因此我们可以大胆猜想：

$$\Delta_t^k f(x) = C_k^0 f(x+kt) - C_k^1 f[x+(k-1)t]$$
$$+ \cdots + (-1)^l C_k^l f[x+(k-l)t]$$
$$+ \cdots + (-1)^k C_k^k f(x). \qquad (4.7)$$

这个公式可以用数学归纳法证明．请读者自己完成它．

在这个公式中，取 $t=1$，$x=0$，并把 Δ_1 简写为 Δ，就得到

$$\Delta^k f(0) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l C_k^l f(k-l). \qquad (4.8)$$

特别，如果 $f(x)=x^n$，就有

$$\Delta^k f(0) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l C_k^l (k-l)^n = A(n,\ k) \quad (f(x)=x^n). \qquad (4.9)$$

(其中 $A(n,\ k)$ 见 3.1 的 1.)

以上得到的是 k 阶差分 $\Delta_t^k f(x)$ 的表达式．反过来，函数值 $f(x+nt)$ 也可以通过 $f(x)$ 及其各阶差分 $\Delta_t^k f(x)$ 来表达．我们可以从各阶差分的定义逐步递推：

$$
\begin{aligned}
f(x+nt) &= f[x+(n-1)t] + \Delta_t f[x+(n-1)t] \\
&= \{f[x+(n-2)t] + \Delta_t f[x+(n-2)t]\} \\
&\quad + \{\Delta_t f[x+(n-2)t] + \Delta_t^2 f[x+(n-2)t]\} \\
&= f[x+(n-2)t] + 2\Delta_t f[x+(n-2)t] \\
&\quad + \Delta_t^2 f[x+(n-2)t] \\
&= \{f[x+(n-3)t] + \Delta_t f[x+(n-3)t]\} \\
&\quad + 2\{\Delta_t f[x+(n-3)t] + \Delta_t^2 f[x+(n-3)t]\} \\
&\quad + \{\Delta_t^2 f[x+(n-3)t] + \Delta_t^3 f[x+(n-3)t]\} \\
&= f[x+(n-3)t] + 3\Delta_t f[x+(n-3)t] \\
&\quad + 3\Delta_t^2 f[x+(n-3)t] + \Delta_t^3 f[x+(n-3)t] \\
&= \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

由此可以猜想应有公式($k\leqslant n$)

$$
\begin{aligned}
f(x+nt) &= C_k^0 f[x+(n-k)t] + C_k^1 \Delta_t f[x+(n-k)t] \\
&\quad + \cdots + C_k^k \Delta_t^k f[x+(n-k)t]. \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

这个公式可以用数学归纳法证明，请读者自己完成它。

取 $k=n$，就得到

$$
f(x+nt) = C_n^0 f(x) + C_n^1 \Delta_t f(x) + \cdots + C_n^n \Delta_t^n f(x). \qquad (4.11)
$$

取 $t=1, x=0$，由于在 $f(x)=x^m$ 时，显然有 $\Delta^k x^m = 0\ (k>m)$，从而得到：

$$
f(n) = \begin{cases} C_n^0 f(0) + C_n^1 \Delta f(0) + C_n^2 \Delta^2 f(0) + \cdots + C_n^m \Delta^m f(0) \\ \qquad\qquad (n\geqslant m); \\ C_n^0 f(0) + C_n^1 \Delta f(0) + \cdots + C_n^n \Delta^n f(0) \quad (n<m) \\ \qquad\qquad (\text{当 } f(x)=x^m). \end{cases}
$$

也就是说当 $f(x)=x^m$ 时，有

$$n^m=\begin{cases} n\Delta f(0)+\dfrac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 f(0) \\ \qquad +\cdots+\dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\Delta^m f(0) \quad (n\geqslant m); \\ n\Delta f(0)+\dfrac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 f(0) \\ \qquad +\cdots+\dfrac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\Delta^n f(0) \quad (n<m). \end{cases}$$

但是当 $k>n$ 时，显然 $n, n-1, \cdots, n-k+2, n-k+1$ 中总有一个是 0. 事实上，这是因为如果 $k=n+l(l\geqslant 1)$，那末 $n-k+1=1-l\leqslant 0$，从 $n, n-1, \cdots$ 到 $(n-k+1)$ 这 k 个连续整数的最后一个为零为负，所以这串数中总有一个是 0. 因此

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=0.$$

于是我们可以写成一个统一的公式 $(f(x)=x^m)$

$$n^m=n\Delta f(0)+\frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 f(0)$$
$$+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\Delta^m f(0)$$

因此，m 阶多项式 x^m 与 m 阶多项式

$$x\Delta f(0)+\frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f(0)$$
$$+\cdots+\frac{x(x-1)\cdots(x-m+1)}{m!}\Delta^m f(0)$$

在所有 $x=n$ 处完全一样，所以这两个 m 阶多项式应该完全一样：

$$x^m=\Delta f(0)x+\frac{\Delta^2 f(0)}{2!}x(x-1)$$
$$+\cdots+\frac{\Delta^m f(0)}{m!}x(x-1)\cdots(x-m+1)$$
$$=\Delta f(0)(x)_1+\frac{\Delta^2 f(0)}{2!}(x)_2+\cdots+\frac{\Delta^m f(0)}{m!}(x)_m.$$

注意到$f(x)=x^m$, $f(0)=0$, 所以把m换为n后得

$$x^n=f(0)(x)_0+\Delta f(0)(x)_1+\cdots+\frac{\Delta^n f(0)}{n!}(x)_n$$

$$(f(x)=x^n). \tag{4.12}$$

由此，按第二类斯特林数的定义，应有

$$S(n,\ k)=\frac{\Delta^k f(0)}{k!}\quad (f(x)=x^n)$$

$$=\frac{A(n,\ k)}{k!}. \tag{4.13}$$

另一方面由3.6知$\frac{A(n,\ k)}{k!}$是n个不同的球放到k个相同的格子中且不许出现空格的不同放法数. 因此就得到：第二类斯特林数$S(n,\ k)$表示：n个不同的球放到k个相同的格中且不许出现空格的外观不同的放法数，也就是把n个不同的球分成k类的分法数. 这就是它的组合含义.

4.2 母函数方法

母函数方法是一种广泛运用的数数方法. 一般的母函数是一种幂级数(甚至还可带负幂)，这需要数学分析的知识. 在作为有限数学引论的本书中不涉及它. 本段只对多项式或广义多项式(即可以带负幂的情况)这样特殊形式的母函数举几个例子来说明数数的母函数方法.

【例1】(天平砝码问题) 设有m_1克，m_2克，…，m_k克重的砝码各一个，用在天平上称物(在这些m_1，…，m_k中可以有相同的数).

(1) 如果相同重量的砝码上都带有不同的号码(即它们之间外表是不同的)，用它们称一个n克重的物体，问有多少种外观看起来不同的称法?

(2) 如果相同重量的砝码外观是完全一样的(完全相同因而不能区别它们)，用它们称一个 n 克重的物体，问有多少种外观看起来不同的称法？

解：先看只允许把砝码加在天平的一端的情况：

(1) 对于一个 n 克重的物体的一种称法对应于下述方程的一组解 $(c_1, \cdots, c_k)$：

$$\begin{cases} c_1m_1+c_2m_2+\cdots+c_km_k=n \\ c_i=0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

(其中 $c_i=0$ 表示不用第 i 个砝码，$c_i=1$ 表示用第 i 个砝码)。因此对 n 克的物体的不同称法数恰是该方程解的组数。另一方面这个方程的一组解对应于一个 $x^{c_1m_1}x^{c_2m_2}\cdots x^{c_km_k}$，它恰是

$$(1+x^{m_1})(1+x^{m_2})\cdots(1+x^{m_k})$$

展开式中构成 x^n 的一个项，它的全部解的组数就是展开式中构成 x^n 的所有项的数目。也就是 x^n 的系数。

这个 $(1+x^{m_1})(1+x^{m_2})\cdots(1+x^{m_k})$ 就叫做**母函数**(更确切地说，如果令 A_n 为称 n 克的物体的不同称法数，那末它称为 **A_n 的母函数**)。在这里它是一个多项式，这是一种最简单形式的母函数。

一个数数问题常常可以归结为寻找一个母函数的问题，在有的时候，母函数不仅是一个无穷级数而且还非常复杂，但是对很多情况来说，它仍不失为一种有效的数数方法。

例如 $k=7$，$m_1=m_2=m_3=1$，$m_4=m_5=m_6=2$，$m_7=5$，那末不同称法数的母函数为

$$\begin{aligned}&(1+x)^3(1+x^2)^3(1+x^5)\\ &\quad=1+3x+6x^2+10x^3+12x^4+13x^5+13x^6+12x^7\\ &\qquad+13x^8+13x^9+12x^{10}+10x^{11}+6x^{12}+3x^{13}+x^{14}.\end{aligned}$$

所以称 10 克重的物体的不同称法数为(x^{10} 的系数) 12.

一般地说，如果这 m_1, …, m_k 中有 r_1 个 m_1, r_2 个 m_2, …, r_l 个 m_l, 而且 m_1, …, m_l 两两不相等,

$$r_1+\cdots+r_l=k \quad (r_1m_1+\cdots+r_lm_l=m_1+\cdots+m_k)$$

同时，同重量的各砝码之间是可以区分的，那末不同称法数的母函数为

$$(1+x^{m_1})^{r_1}(1+x^{m_2})^{r_2}\cdots(1+x^{m_l})^{r_l}.$$

(2) 设这 m_1, …, m_k 中有 r_1 个 m_1, …, r_l 个 m_l, 而且 m_1, …, m_l 两两不相等

$$(r_1+\cdots+r_l=k,\ r_1m_1+\cdots+r_lm_l=m_1+\cdots+m_k),$$

这里与 (1) 不同处在于这 r_1 个重 m_1 克的砝码彼此都是没有任何差别的. 因此，一种称法例如用了 c_1 个 m_1 克砝码, c_2 个 m_2 克砝码, …, c_l 个 m_l 克砝码

$$(0\leqslant c_1\leqslant r_1,\ 0\leqslant c_2\leqslant r_2,\ \cdots,\ 0\leqslant c_l\leqslant r_l),$$

就对应于方程

$$\begin{cases} c_1m_1+c_2m_2+\cdots+c_lm_l=n \\ 0\leqslant c_1\leqslant r_1,\ 0\leqslant c_2\leqslant r_2,\ \cdots,\ 0\leqslant c_l\leqslant r_l \quad (c_i\text{ 整数}) \end{cases}$$

的一组解. 全部称法数就对应地等于这方程的全部解的组数. 但是这个方程的一组解 $(c_1, \cdots, c_l)$ 对应于一个 $x^{c_1m_1}x^{c_2m_2}\cdots x^{c_lm_l}$, 它是

$$(1+x^{m_1}+x^{2m_1}+\cdots+x^{r_1m_1})(1+x^{m_2}+x^{2m_2}+\cdots+x^{r_2m_2})\cdots (1+x^{m_l}+x^{2m_l}+\cdots+x^{r_lm_l})$$

的展开式中构成 x^n 的一个项. 方程的全部解的组数就等于这个展开式中构成 x^n 的所有项的数目，也就是 x^n 的系数. 所以本问题中需求的不同称法数的母函数就是上面的那个函数.

例如有 3 个 1 克重的砝码, 3 个 2 克重的砝码, 1 个 5 克重的砝码 (与上面 (1) 中类似，只是相同重量的砝码不象在 (1)

中那样，在这里，它们的外观是一样的），那末母函数为

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^5)$$
$$=1+x+2x^2+2x^3+2x^4+3x^5+3x^6+4x^7+3x^8+3x^9$$
$$+2x^{10}+2x^{11}+2x^{12}+x^{13}+x^{14}.$$

所以对于10克重的物体的不同称法数为(x^{10} 的系数)2.

若砝码允许加在天平的两端，那末对于问题(1)来说，不同称法数的母函数是

$$(x^{-m_1}+1+x^{m_1})(x^{-m_2}+1+x^{m_2})\cdots(x^{-m_k}+1+x^{m_k}),$$

如果 $k=7$, $m_1=m_2=m_3=1$, $m_4=m_5=m_6=2$, $m_7=5$, 那末母函数为：

$$x^{-14}+3x^{-13}+8x^{-12}+16x^{-11}+29x^{-10}+43x^{-9}+65x^{-8}$$
$$+90x^{-7}+103x^{-6}+114x^{-5}+130x^{-4}+137x^{-3}+142x^{-2}$$
$$+145x^{-1}+143+145x+142x^2+137x^3+130x^4$$
$$+114x^5+103x^6+90x^7+65x^8+43x^9+29x^{10}+16x^{11}$$
$$+8x^{12}+3x^{13}+x^{14}.$$

所以称10克重的物体的不同方法数为29(即 x^{10} 的系数). 问题(2)比较繁，这里就略去不讲了.

*【例2】 n 个数1, 2, …, n 的任意一个排列中，出现在1前面且比它大的数的个数叫做关于1的逆序个数，出现在2前面且比它大的数的个数叫做关于2的逆序个数，……，出现在 $n-1$ 前面且比它大的数的个数叫做关于 $n-1$ 的逆序个数. 这些逆序个数的总数叫做该排列的逆序个数. 显然，任何一个上述排列的逆序个数不会超过

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

今要求在 n 个文字排列中逆序个数恰为 k $\left(k\leqslant\frac{n(n-1)}{2}\right)$ 的排列有多少个?

解：设这 n 个文字的排列中逆序个数恰为 k 的排列一共有 $A_{n,k}$ 个.

在一个排列中，关于1的逆序个数不超过 $n-1$，关于2的逆序个数不超过 $n-2$，…，关于 $n-1$ 的逆序个数不超过1，而且任意给定非负整数组 $m_1, m_2, \cdots, m_{n-1}$，只要满足 $m_1 \leqslant n-1$，$m_2 \leqslant n-2$，…，$m_{n-1} \leqslant 1$，就唯一地能确定一个关于1的逆序个数为 m_1，关于2的逆序个数为 $m_2, \cdots$，关于 $n-1$ 的逆序个数为 m_{n-1} 的排列，其办法如下：

根据 $m_{n-1}=1$ 还是0而决定 $n-1$ 排在 n 后面还是前面.

根据 $m_{n-2}=2$，1还是0而决定 $n-2$ 排在已排好的 $n-1$、n 后面，中间还是前面.

根据 $m_{n-3}=3$，2，1还是0而决定 $n-3$ 排在已排好的 $n-2$、$n-1$、n 后面、其中二个的后面、其中一个的后面还是它们的前面.

……

以上的排法可以唯一地确定一个排列，因此，$A_{n,k}$ 等于下述方程解的个数

$$\begin{cases} m_1+m_2+\cdots+m_{n-1}=k \\ m_i \text{ 整数}, 0\leqslant m_1\leqslant n-1,\ 0\leqslant m_2\leqslant n-2,\ \cdots,\ 0\leqslant m_{n-1}\leqslant 1. \end{cases}$$

但是这个方程的一个解恰好提供了函数

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})(1+x+x^2+\cdots+x^{n-2})\cdots(1+x+x^2)(1+x)$$

的展开式中合成 x^k 的一个项 $x^{m_1}x^{m_2}\cdots x^{m_{n-1}}$. 因此，解的总数就是这展开式中 x^k 的系数，也就是

$$\sum_{k=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} A_{n,k}x^k=(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})(1+x+x^2+\cdots+x^{n-2})\cdots(1+x).$$

于是等号右边这个多项式就是用来表示(或称“生成”) $A_{n,k}$ 的母函数.

利用母函数还可以证明某些等式. 例如

【例3】 生成组合数 $C_n^k(0\leqslant k\leqslant n)$ 的母函数为

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k=(1+x)^n;$$

生成 $C_m^j(0\leqslant j\leqslant m)$ 的母函数为

$$\sum_{j=0}^{m} C_m^j x^j=(1+x)^m.$$

于是

$$(1+x)^{n+m}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}C_n^kC_m^jx^{k+j}$$

$$=\sum_{l=0}^{n+m}\left(\sum_{k=0}^{l}C_n^kC_m^{l-k}\right)x^l \quad (令\ k+j=l).$$

这说明$(1+x)^{n+m}$是生成(x^l 的系数)$\sum_{k=0}^{l}C_n^kC_m^{l-k}$ $(0\leqslant l\leqslant n+m)$的母函数. 但显然$(1+x)^{n+m}$是生成$C_{n+m}^l(0\leqslant l\leqslant n+m)$($x^l$的系数)的母函数,因此

$$\sum_{k=0}^{l}C_n^kC_m^{l-k}=C_{n+m}^l.$$

特别,如果$n=m$, $l=n$, 那末

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^kC_n^{n-k}=C_{n+n}^n.$$

但是$C_n^{n-k}=C_n^k$, 所以得到

$$\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=C_{2n}^n.$$

以上遇到的母函数是最特殊的情况, 它们是多项式或者是广义多项式(包含x的负幂的情形).

4.3 其他数数方法

(一)反射方法(对称法)

【例 1】(具有反射壁的随机游动) 一个质点从原点出发,每次任意移动一步, 可以向右也可以向左, 每步走一格,如果一共走了n步,问

(1) 第n步恰好走到原点右方m格处的不同走法有多少种?

(2) 在原点右方l格处($l<n$)加入一个反射壁(如果质点在某步碰壁, 则规定下一步必须向左反射到原来的点), 在此条件下,第n步恰好走到原点右方m格处的不同走法有多

少种?

解:

(1) 设这 n 步中向右的步数为 k 步, 则向左的步数为 $n-k$ 步. 要使第 n 步恰走到原点右方 m 格处等价于(抵消向左走的效果后,实际向右走的步数为 m)

$$k-(n-k)=m.$$

所以不可能出现 n 与 m 奇偶不一样的情况,而且

$$k=\frac{n+m}{2}.$$

也就是说:第 n 步结果恰在原点右方 m 格处的走法在 n 步中必有 $\frac{n+m}{2}$ 步(n, m 奇偶相同)向右, 不同的走法总数为 $C_n^{\frac{n+m}{2}}$. 因此本问题所求的数目为

$$\begin{cases} C_n^{\frac{n+m}{2}}, & \text{当 } n, m \text{ 奇偶性相同}, \\ 0, & \text{当 } n, m \text{ 奇偶性不同}. \end{cases}$$

(2) "质点走 n 步恰好到达原点右方 m 格处"这件事可以分成两种情况完成: 第一种情况是没有经过反射壁反射而到达的,不同的走法数为

$$\begin{cases} C_n^{\frac{n+m}{2}}, & \text{当 } n+m \text{ 为偶}, \\ 0, & \text{当 } n+m \text{ 为奇}. \end{cases}$$

第二种情况是经过反射壁而达到的(这时必须 $m<l$, 否则在原点右方 l 处就会反射从而达不到原点右方 m 处). 现在用反射法求这种情况下不同走法的数目.取横坐标为到达地点,每走一步, 向右或向左移动一格, 取纵坐标为走的累计次数,每走一步,向上移一格. 所以实际走的道路图形为:每走一步要么向右上方向走一格斜线(即向右走一步), 要么向左上方

向走一格斜线(即向左走一步)，图 4-2 即是这种道路(走法)的示意图．走 n 步后处在原点右方 m 格就等价于要求质点停在图中 M 处，如果走到 M 的道路是由反射直线 $x=l$ (即在 l 处的反射壁)反射而来的，那末经反射后走到 M 的每一条道路都对应于一条到 M' 的道路，这里 M' 是 M 关于反射直线 $x=l$ 的镜面对称点．因此，从原点经反射到达 M 的道路数与从原点没有反射壁到 M' 的道路数是一样的．但是 M' 在原点右方 $l+(l-m)$ 格处(即 M' 的横坐标)也即 $2l-m$ 处．所以后一种道路数等于从原点没有反射壁走 n 步后恰好到原点右方 $2l-m$ 处的不同走法数．由(1)，这数应为

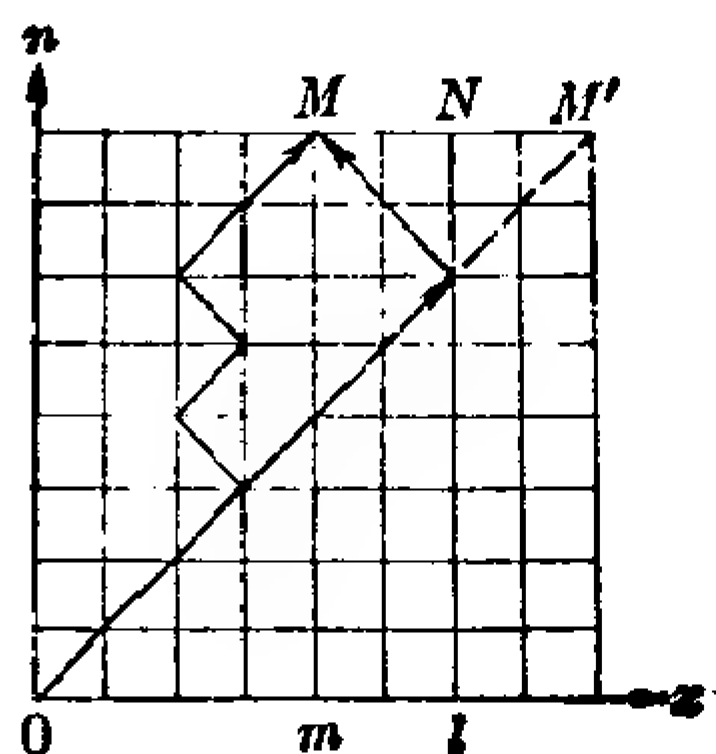


图 4-2

$$\begin{cases} C_n^{\frac{n+(2l-m)}{2}}, & \text{当 } n+m \text{ 为偶，且 } m<l, \\ 0, & \text{当 } n+m \text{ 为奇或 } m>l. \end{cases}$$

综合以上两种情况可知：在原点右方 l 格处设置反射壁的情况下，从原点出发走 n 步后恰好到原点右方 m 格的不同走法数为：

$$\begin{cases} C_n^{\frac{n+m}{2}}+C_n^{l+\frac{n-m}{2}}, & \text{当 } m<l,\ m+n \text{ 为偶数}, \\ 0, & \text{当 } m>l \text{ 或 } m+n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

在 $m=l$ 且 $n+m$ 为偶数的情况，有一点不同：这时 M 与 M' 重合，且均在 N 处．由于 $x=l$ 处反射壁的存在，到 N 的道路必须全在 $x=l$ 左侧(可以碰到 $x=l$)．

在没有反射壁时，从原点到 N 的 $C_n^{\frac{n+l}{2}}$ 条道路可分为两类：第一类是到 N 前与 $x=l$ 不相碰的道路；第二类是到 N 前已与 $x=l$ 相碰过的道路，这类道路又可以分成甲、乙两种：甲

种是全在 $x=l$ 左侧的道路；乙种是部分在 $x=l$ 右侧的道路. 在设置反射壁时，每条乙种道路必重合于某条甲种道路，于是在 $x=l$ 处有反射壁而且第 n 步到原点右方 l 格处的不同走法数就是上述第一类道路与第二类甲种道路数目之和，或者说，是从 $C_n^{\frac{n+l}{2}}$ 中减去第二类乙种道路数目所得的数.

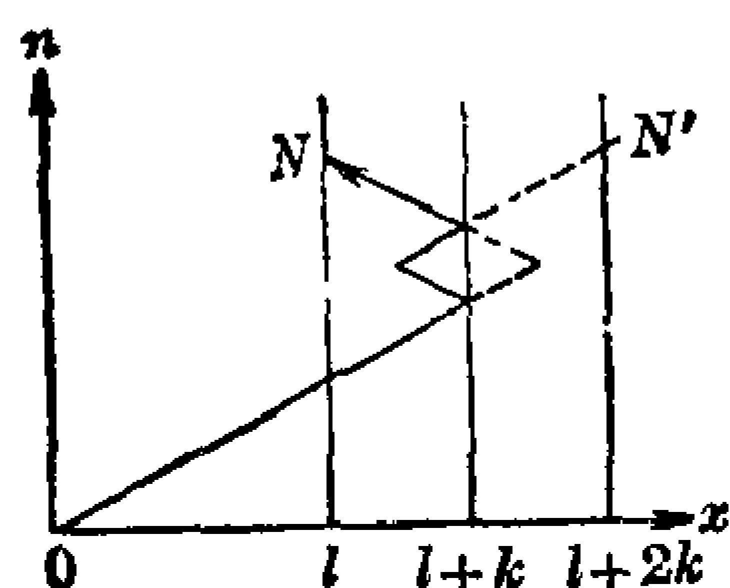


图 4-3

下面计算乙种道路的数目：每一条乙种道路有一个最大横坐标 $l+k$($k>0$). 对于任意一条从原点出发终点为 N 的最大横坐标为 $l+k$ 的道路，都可以找到一条从原点出发以 N 关于直线 $x=l+k$ 的对称点 N' 为终点的道路与它对应(如图 4-3). 反之，从原点到 N' 的一条道路也必然对应一条最大横坐标为 $l+k$ 的乙种道路. 故以最大横坐标为 $l+k$ 的乙种道路的数目等于从原点出发到 N' 的道路数，即从原点出发走 n 步恰好到原点右方 $l+2k$ 格处的不同走法数，由(1)可知，这个数为

$$C_n^{\frac{n+l+2k}{2}}=C_n^{\frac{n+l}{2}+k}.$$

这里的 k 必须满足 $\frac{n+l}{2}+k\leqslant n$，即 $k\leqslant\frac{n-l}{2}$.

因此，乙种道路的数目为

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-l}{2}} C_n^{\frac{n+l}{2}+k}.$$

所以最后求得当 $m=l$ 且 $n+m$ 为偶数时，问题(2)的解为

$$C_n^{\frac{n+l}{2}}-\sum_{k=1}^{\frac{n-l}{2}} C_n^{\frac{n+l}{2}+k}.$$

例如：若 $n=5$，$m=l=3$，那末 $C_n^{\frac{n+l}{2}}=C_5^4=5$，$\frac{n-l}{2}=1$，

$C_n^{\frac{n+l}{2}+1}=1$. 所以问题(2)的解为 4.

【例 2】(排队找零钱问题) 设在某医院挂号处有 $2n$ 人在排队挂号，挂号费每人 5 分，但这 $2n$ 人中只有半数人有 5 分一个的硬币，其余人只有一角一张的纸币. 又设开始挂号时医院挂号处没有零钱找. 问在这 $2n$ 个币值的排法中，使挂号过程中不需要等待找零钱的排法有多少种？(例如说：第一个币值不是 5 分币的所有排法就都是需要等待找零钱的排法).

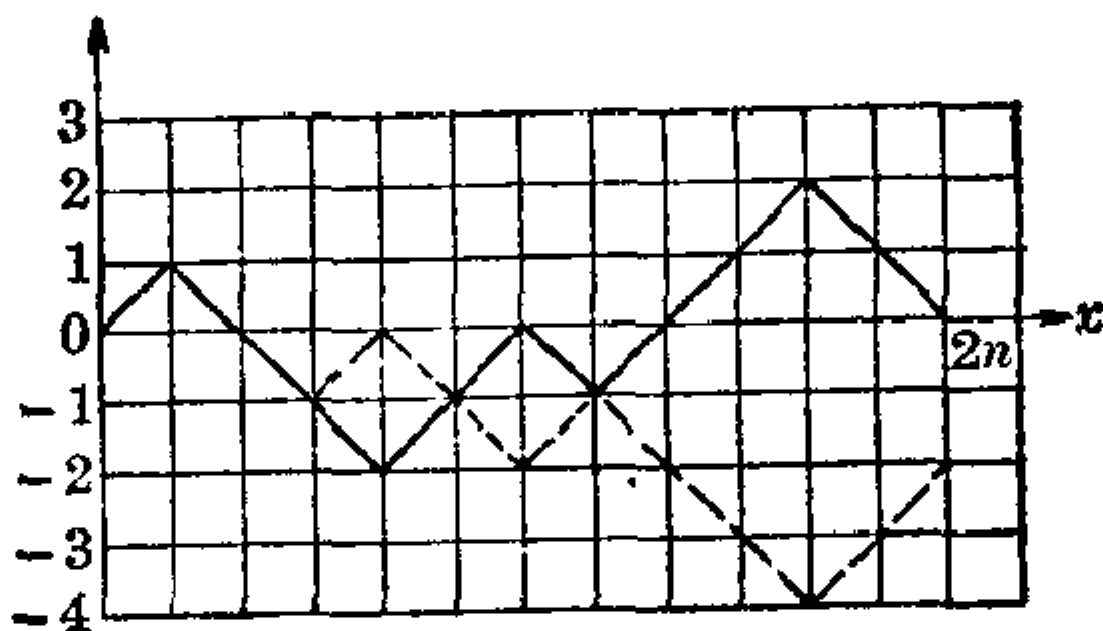


图 4-4

解：用横坐标表示挂号人的次序；用纵坐标表示挂号处积存的 5 分币的数目. 则纵坐标负值就表示找不开零钱. $2n$ 个币值的不同排法(按题意，不看具体的 $2n$ 个人的各种排法，只看 n 个 5 分币及 n 个 1 角币的各种排法)只需看这 n 个 5 分币在这 $2n$ 个币值排队中所占的位置，它们一共有 C_{2n}^n 种不同的排法. 另一方面，来一个持 5 分币的人挂号，积存的 5 分币就多一个，图 4-4 中的线就向右上方走一格；来一个持 1 角币的人挂号，积存的 5 分币就因找出一个而减少一个，图 4-4 中的线就向右下方走一格. 所以这 $2n$ 个币值的一种排法就对应于图 4-4 中终止于 $(2n, 0)$ 的一条线(或称一条道路). 只要这根图线和直线 $y=-1$ 相交，就表示这种排法是找不开零钱的排法. 但是，对于任意一条与 $y=-1$ 相交且终止于 $(2n, 0)$ 的道路都存在一条与它关于直线 $y=-1$ 的对称图线(如图 4-4 中的虚线部分就是对称图线). 这种对称图线终止于点 $(2n, 0)$ 的对称点 $(2n, -2)$，我们称这种对称图线为虚图线. 因此，“找不开”零钱的排法数就是这种虚图线数

的全体. 由于虚图线终止于$(2n, -2)$，每一条虚图线的含义为：在 $2n$ 次向上或向下的移动中，向下移动数比向上移动数多 2，因此，向上移动了 $n-1$ 次，向下移动了 $n+1$ 次. 所以两条不同的这种虚图线就表示了这 $2n$ 次移动中 $n-1$ 次向上移动所占的位置的不同. 从而虚图线的总数为 C_{2n}^{n-1}. 于是不发生"找不开钱"的排法总数为 $C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n-1}$.

[注 如果每个人之间也认为有差别，那末作为第二步，还要对 n 个持有 1 角纸币的人进行排列，一共 $n!$ 种不同排法；还有第三步，对 n 个持有 5 分币的人进行排列，也有 $n!$ 种不同排法. 这三个步骤联起来的不同排法数为：

$$(C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n-1})n!n!=(2n)!-\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}(n!)^2=\frac{(2n)!}{n+1}.]$$

(二) 变换方法

在第二节 2.2 中曾经讲了两类组合变换及其逆转公式. 它们在计算某些数数问题时是很有用的. 本段中将再介绍一些在数数问题中有用的一些变换.

定理 1(第一型斯特林变换及其逆转公式) 若对任意正整数 $m\leqslant n$，均有

$$b_m=\sum_{k=0}^{m}s(m, k)a_k$$

[$(b_1, \cdots, b_n)$称为$(a_1, \cdots, a_n)$的斯特林变换]，那末有逆转公式

$$a_m=\sum_{k=0}^{m}S(m, k)b_k. \tag{4.14}$$

在证明本定理前，先证明一个引理.

引理 1

$$\sum_{k=l}^{m}S(m, k)\cdot s(k, l)=\begin{cases}1, & l=m,\\ 0, & l<m.\end{cases} \tag{4.15}$$

【证】 按 $s(k, l)$ 和 $S(m, k)$ 的定义

$$x^m=\sum_{k=0}^{m}S(m, k)(x)_k \quad [(x)_k=x(x-1)\cdots(x-k+1)]$$

$$=\sum_{k=0}^{m}S(m, k)\left(\sum_{l=0}^{k}s(k, l)x^l\right).$$

在此补充定义

$$s(k, l)=0 \quad (\text{当 } k<l),$$

于是

$$x^m=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}S(m, k)\cdot s(k, l)x^l$$

$$=\sum_{l=0}^{m}\left[\sum_{k=0}^{m}S(m, k)\cdot s(k, l)\right]x^l$$

$$=\sum_{l=0}^{m}\left[\sum_{k=l}^{m}S(m, k)\cdot s(k, l)\right]x^l$$

(因为 $k<l$ 时, $s(k, l)=0.$)

比较等号两边的两个多项式的系数, 即知引理成立. ▌

现在证明逆转公式: 由引理 1:

$$a_m=\sum_{l=0}^{m}\left[\sum_{k=l}^{m}S(m, k)\cdot s(k, l)\right]a_l$$

$$=\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}S(m, k)\cdot s(k, l)a_l \quad (\text{因 } k<l \text{ 时}, s(k, l)=0)$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}S(m, k)\cdot s(k, l)a_l$$

$$=\sum_{k=0}^{m}S(m, k)\left(\sum_{l=0}^{m}s(k, l)a_l\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{m}S(m, k)\left(\sum_{l=0}^{k}s(k, l)a_l\right) \quad [\text{因 } l>k \text{ 时}, s(k, l)=0]$$

$$=\sum_{k=0}^{m}S(m, k)b_k. \quad ▌$$

组合变换与斯特林变换的逆转公式的证明非常类似. 用同样的办法还可以用来证明一个比它们更为一般的逆转公

式，即

定理2(第一逆转公式) 若对任意的$m\leqslant n$, $p_m(x)$与$q_m(x)$都是m阶多项式，而且满足

$$q_m(x)=\sum_{k=0}^{m}\varphi(m,\ k)\cdot p_k(x), \tag{4.16}$$

$$p_m(x)=\sum_{k=0}^{m}\psi(m,\ k)\cdot q_k(x). \tag{4.17}$$

那末对于从$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$到$(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$的下述变换(称为第一型变换)

$$b_m=\sum_{k=0}^{m}\varphi(m,\ k)a_k \tag{4.18}$$

必有逆转公式

$$a_m=\sum_{k=0}^{m}\psi(m,\ k)b_k. \tag{4.19}$$

在证明本定理之前，先证明一个引理：

引理2

$$\sum_{k=l}^{m}\psi(m,\ k)\cdot\varphi(k,\ l)=\begin{cases}1, & l=m,\\ 0, & l<m.\end{cases} \tag{4.20}$$

【证】 由(4.16)及(4.17)，得

$$\begin{aligned}p_m(x)&=\sum_{k=0}^{m}\psi(m,\ k)\cdot q_k(x)\\&=\sum_{k=0}^{m}\psi(m,\ k)\left[\sum_{l=0}^{k}\varphi(k,\ l)p_l(x)\right].\end{aligned}$$

再补充定义 $\varphi(k,\ l)=0$ (当$k<l$)，

于是

$$\begin{aligned}p_m(x)&=\sum_{k=0}^{m}\psi(m,\ k)\sum_{l=0}^{m}\varphi(k,\ l)\cdot p_l(x)\\&=\sum_{l=0}^{m}\left[\sum_{k=0}^{m}\psi(m,\ k)\cdot\varphi(k,\ l)\right]p_l(x)\\&=\sum_{l=0}^{m}\left[\sum_{k=l}^{m}\psi(m,\ k)\cdot\varphi(k,\ l)\right]p_l(x).\end{aligned}$$

这个等式的两边都是 m 阶多项式，比较两边的系数，由于 x^m 只出现在 $p_m(x)$ 中(其它 $p_k(x)$ $(k<m)$ 为 k 阶多项式，不出现 x^m)，因此有

$$\sum_{k=l}^{m}\psi(m,\ k)\cdot\varphi(k,\ l)=1 \quad (\text{当 } l=m \text{ 时}),$$

于是
$$\sum_{l=0}^{m-1}\left[\sum_{k=l}^{m}\psi(m,\ k)\cdot\varphi(k,\ l)\right]p_l(x)=0.$$

再比较 x^{m-1} 的系数，得到

$$\sum_{k=l}^{m}\psi(m,\ k)\cdot\varphi(k,\ l)=0 \quad (\text{当 } l=m-1 \text{ 时}).$$

反向地运用数学归纳法，即可证明引理的结论．▌

现在证明第一逆转公式：由引理 2，得

$$\begin{aligned}
a_m&=\sum_{l=0}^{m}\left[\sum_{k=l}^{m}\psi(m,\ k)\cdot\varphi(k,\ l)\right]a_l\\
&=\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\psi(m,\ k)\cdot\varphi(k,\ l)a_l\\
&=\sum_{k=0}^{m}\psi(m,\ k)\left[\sum_{l=0}^{m}\varphi(k,\ l)a_l\right]\\
&=\sum_{k=0}^{m}\psi(m,\ k)\left(\sum_{l=0}^{k}\varphi(k,\ l)a_l\right)\\
&=\sum_{k=0}^{m}\psi(m,\ k)b_k.
\end{aligned}$$ ▌

定理 3(第二逆转公式)　若 $p_n(x)$、$q_n(x)$ 及它们之间的关系满足第一逆转公式中的假定，那末对于从 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ 到 $(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$ 的第二型变换 $(m\leqslant n)$

$$b_m=\sum_{k=m}^{n}\varphi(k,\ m)a_k, \tag{4.21}$$

必有逆转公式

$$a_m=\sum_{k=m}^{n}\psi(k,\ m)b_k. \tag{4.22}$$

在证明本定理之前，先证明一个与引理 2 类似的引理，即

引理 3

$$\sum_{k=m}^{l} \varphi(l,\ k)\cdot\psi(k,\ m)=\begin{cases}1, & m=l,\\ 0, & m<l.\end{cases} \tag{4.23}$$

【证】

$$q_l(x)=\sum_{k=0}^{l}\varphi(l,\ k)\cdot p_k(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{l}\varphi(l,\ k)\cdot\sum_{m=0}^{k}\psi(k,\ m)\cdot q_m(x).$$

注意到 $\psi(k,\ m)=0(m>k)$，就有

$$q_l(x)=\sum_{k=0}^{l}\sum_{m=0}^{l}\varphi(l,\ k)\cdot\psi(k,\ m)\cdot q_m(x)$$

$$=\sum_{m=0}^{l}\left[\sum_{k=0}^{l}\varphi(l,\ k)\cdot\psi(k,\ m)\right]q_m(x)$$

$$=\sum_{m=0}^{l}\left[\sum_{k=m}^{l}\varphi(l,\ k)\cdot\psi(k,\ m)\right]q_m(x).$$

仿照引理 2 中所用的比较系数的办法即得到

$$\sum_{k=m}^{l}\varphi(l,\ k)\cdot\psi(k,\ m)=\begin{cases}1, & m=l,\\ 0, & m<l.\end{cases}$$

引理证毕. 】

现在证明第二逆转公式：由引理 3，有

$$a_m=\sum_{l=m}^{n}\left[\sum_{k=m}^{l}\varphi(l,\ k)\cdot\psi(k,\ m)\right]a_l$$

在 $k>l$ 时，补充定义 $\varphi(l,\ k)=0$，于是

$$a_m=\sum_{l=m}^{n}\left[\sum_{k=m}^{n}\varphi(l,\ k)\cdot\psi(k,\ m)\right]a_l$$

$$=\sum_{k=m}^{n}\psi(k,\ m)\left[\sum_{l=m}^{n}\varphi(l,\ k)a_l\right]$$

$$=\sum_{k=m}^{n}\psi(k,\ m)b_k. \text{】}$$

第一型斯特林变换及其逆转公式是第一逆转公式的特例，这时候 $p_m(x)=(x)_m$，$q_m(x)=x^m$，$\varphi(m, k)=s(m, k)$，$\psi(m, k)=S(m, k)$．相应地，第二逆转公式这时候成为：

定理 4（第二型斯特林变换及其逆转公式） 若对任意正整数 $m\leqslant n$，均有

$$b_m=\sum_{k=m}^{n} s(k, m)a_k, \tag{4.24}$$

那末必有逆转公式

$$a_m=\sum_{k=m}^{n} S(k, m)b_k. \tag{4.25}$$

在 2.2 中讲过的两种类型的组合变换公式也分别是第一和第二逆转公式的特例，这时候

$$p_m(x)=(1-x)^m, \quad q_m(x)=x^m,$$
$$\varphi(m, k)=\psi(m, k)=(-1)^k C_m^k.$$

*(三) 变换法的实质 (抽象处理)

本段讨论变换法的实质，也就是从统一的观点分析变换法．

设 X 是一个半序集(参见第三章第一节最后一个定义及例子)，且有最小元素 **0**(即对任意的 $x\in X$，均有 $0\leqslant x$)，并设它满足条件(L)：对任意的 $x\leqslant y$，集合

$$\{u \mid u\in X,\ x\leqslant u\leqslant y\}$$

是有限集(记成$[x, y]$，类似于闭区间)，这样的 X 称为*局部有限的半序集*．

局部有限的半序集的典型例子有

【例 1】 X 为全体非负整数，"$\leqslant$"就是普通的大小次序，**0** 元素就是 0．

【例 2】 X 为不比 n 大的全体非负整数，半序"$\leqslant$"按下述意义理解：

$$x\leqslant y \text{ 就是 } x-y=\text{非负整数}$$

(这种次序恰与我们习惯的次序相反)．这时最小元素 **0** 就是 n．

【例 3】 X 为全体正整数，“$\leqslant$”按下述意义理解：

$$x \leqslant y \text{ 就是 } x \text{ 能整除 } y.$$

这时最小元素 **0** 就是 1.

【例 4】 设 A 是一个有限集，X 是以 A 的一切子集为元素组成的集，即

$$X=\{S \mid S \subset A\},$$

在 X 中的半序“$\leqslant$”理解为“$\subset$”．这时最小元素 **0** 就是空集 $\emptyset$.

设 X 是一个局部有限的半序集．设在 X 上定义且满足条件

$$f(x, x) \neq 0, \text{ 若 } x \leqslant y \text{ 不成立，则 } f(x, y)=0 \tag{4.26}$$

的二元实数值“函数”$f=f(x, y)$的全体记为 $\boldsymbol{F}$，即

$$\boldsymbol{F}=\{f \mid f=f(x, y),\ f(x, x) \neq 0,\ f(x, y)=0(x \not\leqslant y)\}. \tag{4.27}$$

在 $\boldsymbol{F}$ 上定义一个运算 $*$ 如下：对 $f, g \in \boldsymbol{F}$，定义 $f*g$ 为如下的二元“函数”：

$$(f*g)(x, y) \equiv \begin{cases}\sum\limits_{x \leqslant u \leqslant y} f(x, u) g(u, y) & (\text{当 } x \leqslant y), \\ 0 & (\text{当 } x \not\leqslant y).\end{cases}$$

首先要注意 $f*g$ 确实在 $\boldsymbol{F}$ 中，这是因为

$$(f*g)(x, x)=\sum_{x \leqslant u \leqslant x} f(x, u) \cdot g(u, x)=f(x, x) \cdot g(x, x) \neq 0.$$

又当 $x \not\leqslant y$ 时，

$$(f*g)(x, y)=0.$$

因此 $*$ 是 $\boldsymbol{F}$ 上的一个运算，$*$ 不满足交换律，但是可以证明$(\boldsymbol{F}, *)$是一个群.

定理 5 $(\boldsymbol{F}, *)$是一个群.

【证】 分下列数步：

1° 证明 $*$ 满足结合律，即

$$(f*g)*h=f*(g*h).$$

这是因为由定义知：当 $x \leqslant z$ 时，

$$\begin{aligned}[(f*g)*h](x, z) &= \sum_{x \leqslant y \leqslant z}(f*g)(x, y) \cdot h(y, z) \\ &= \sum_{x \leqslant y \leqslant z}\Big(\sum_{x \leqslant u \leqslant y} f(x, u) \cdot g(u, y)\Big) h(y, z) \\ &= \sum_{\substack{u, y \\ x \leqslant u \leqslant y \leqslant z}} f(x, u) \cdot g(u, y) h(y, z);\end{aligned}$$

$$[f*(g*h)](x, z)=\sum_{x\leqslant u\leqslant z} f(x, u)(g*h)(u, z)$$
$$=\sum_{x\leqslant u\leqslant z} f(x, u)\Big(\sum_{u\leqslant y\leqslant z} g(u, y)h(y, z)\Big)$$
$$=\sum_{\substack{u,y\\ x\leqslant u\leqslant y\leqslant z}} f(x, u)\cdot g(u, y)\cdot h(y, z).$$

所以 $$[(f*g)*h](x, z)=[f*(g*h)](x, z).$$

又当 $x\not\leqslant z$ 时,

$$[(f*g)*h](x, z)=0=[f*(g*h)](x, z).$$

因此 $$(f*g)*h=f*(g*h).$$

2° 证明 $\boldsymbol{F}$ 有单位元 δ, 其中 $\delta=\delta(x, y)$ 是按下述定义的函数(称为克朗内克函数):

$$\delta(x, y)=\begin{cases}0, & x\neq y,\\ 1 & x=y.\end{cases} \tag{4.28}$$

这是因为当 $x\leqslant y$ 时,有

$$[f*\delta](x, y)=\sum_{x\leqslant u\leqslant y} f(x, u)\cdot\delta(u, y)=f(x, y)\cdot\delta(y, y)$$
$$=f(x, y).$$

而 $x\not\leqslant y$ 时, $$(f*\delta)(x, y)=0=f(x, y).$$

因此 $$f*\delta=f.$$

这说明 δ 是运算 $*$ 的右单位元, 同理可证 δ 也是左单位元. 因此 δ 是单位元.

3° 证明对任意的 $f\in\boldsymbol{F}$, 存在逆元 f^{-1}, 即

$$f^{-1}*f=f*f^{-1}=\delta.$$

今进行如下: 令

$$h(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{f(x, x)}, & \text{当 } y=x,\\ -\dfrac{1}{f(y, y)}\displaystyle\sum_{\substack{x\leqslant u\leqslant y\\ u\neq y}} h(x, u)\cdot f(u, y) & (y\neq x,\ \text{但 } x\leqslant y)\\ 0, & \text{当 } x\not\leqslant y.\end{cases} \tag{4.29}$$

这样定义的 $h(x, y)$ 是可以确切计算的. 这是因为 X 是局部有限的, 所以对满足 $x\leqslant y$ 且 $x\neq y$ 的 y 来说, 在 X 中只有有限个不同的元素 $u_1, \cdots, u_n$, 使 $x\leqslant u_1\leqslant y, \cdots, x\leqslant u_n\leqslant y$, 且

$$u_i \neq x, \quad u_i \neq y \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

于是它们中必有一个(不妨设为 u_1)满足条件: $u_2, \cdots, u_n$ 都 $\not\leqslant u_1$. 于是按定义有

$$h(x, u_1) = -\frac{1}{f(u_1, u_1)} h(x, x) \cdot f(x, u_1)$$
$$= -\frac{f(x, u_1)}{f(u_1, u_1) f(x, x)}.$$

按同样的道理, 在 $u_2, \cdots, u_n$ 中必有一个(不妨设为 u_2)满足条件: $u_3, \cdots, u_n$ 都 $\not\leqslant u_2$. 这时出现两种可能: 如果 $u_1 \not\leqslant u_2$, 那末 $h(x, u_2) = -\frac{f(x, u_2)}{f(u_2, u_2) f(x, x)}$; 如果 $u_1 \leqslant u_2$, 那末

$$h(x, u_2) = -\frac{1}{f(u_2, u_2)} [h(x, x) f(x, u_2) + h(x, u_1) f(u_1, u_2)]$$

由已算出的 $h(x, x)$, $h(x, u_1)$完全确定. 依此类推, 可知 $h(x, u_3), \cdots, h(x, u_n)$都分别可以逐一地确定, 因而 $h(x, y)$可以计算出来.

现在证明由上述定义的 $h = h(x, y)$是 f 的左逆: $h*f = \delta$. 这是因为

$$(h*f)(x, x) = \sum_{x \leqslant u \leqslant x} h(x, u) \cdot f(u, x) = h(x, x) \cdot f(x, x) = 1,$$

并且当 $x \leqslant y$ 且 $x \neq y$ 时,

$$(h*f)(x, y) = \sum_{x \leqslant u \leqslant y} h(x, u) f(u, y)$$
$$= \sum_{\substack{x \leqslant u \leqslant y \\ u \neq y}} h(x, u) f(u, y) + h(x, y) f(y, y)$$
$$= 0 \quad (\text{由 } h(x, y) \text{的定义})$$

又当 $x \not\leqslant y$ 时, 按定义, $(h*f)(x, y) = 0$. 综上所证可知:

$$(h*f)(x, y) = \delta(x, y).$$

因此 $h*f = \delta$. 下面我们把 h 记成 f_l^{-1}.

这就是说: 对每个 $f \in \boldsymbol{F}$, 存在一个左逆元 f_l^{-1}. 下面证明它也是右逆元. 这是因为

$$f_l^{-1} * (f * f_l^{-1}) = (f_l^{-1} * f) * f_l^{-1}$$
$$= f_l^{-1} = f_l^{-1} * \delta.$$

但是元素 f_l^{-1} 也有左逆元, 设此左逆元为 f_0, 那末

$$f_0 * f_l^{-1} = (f_0 * f_l^{-1}) * (f * f_l^{-1}) = f_0 * (f_l^{-1} * f) * f_l^{-1}$$
$$= f_0 * \delta * f_l^{-1} = f_0 * f_l^{-1} = \delta$$

这说明 f_r^{-1} 也是 f 的右逆元，所以是 f 的逆元．今后把 f_r^{-1} 简写为 f^{-1}．

1°～3°说明 $(\boldsymbol{F}, *)$ 是一个群．】

$(\boldsymbol{F}, *)$ 称为*算术函数群*．

运算 $*$ 存在逆元这一事实说明了对任意一固定的 $\alpha\in\boldsymbol{F}$，恒存在一个逆元 α^{-1}．从而恒有

若 $$g=f*\alpha, \quad 则 \quad f=g*\alpha^{-1}.$$

于是对 X 上的实值函数 $a(y)$，$b(y)$ $(y\in X)$，如果存在一个 $\alpha\in\boldsymbol{F}$，使

$$b(y)=\sum_{0\leqslant u\leqslant y}a(u)\alpha(u, y) \quad a(0)\neq 0. \tag{4.30}$$

记

$$f(x, y)=\begin{cases}a(y), & 当\ x=0,\\ 任意(\neq 0), & 当\ x=y,\\ 0, & 当\ x\not\leqslant y.\end{cases} \tag{4.31}$$

于是 $f\in\boldsymbol{F}$，再令

$$g=f*\alpha \quad [因而\ g(0, 0)=f(0, 0)\alpha(0, 0)], \tag{4.32}$$

那末

$$g(0, y)=(f*\alpha)(0, y)=\sum_{0\leqslant u\leqslant y}f(0, u)\cdot\alpha(u, y)$$
$$=\sum_{0\leqslant u\leqslant y}a(u)\cdot\alpha(u, y)=b(y). \tag{4.33}$$

由(4.32)及定理 5，得

$$f=g*\alpha^{-1}.$$

根据(4.31)利用(4.33)，可得

$$a(y)=f(0, y)=(g*\alpha^{-1})(0, y)$$
$$=\sum_{0\leqslant u\leqslant y}g(0, u)\alpha^{-1}(u, y)=\sum_{0\leqslant u\leqslant y}b(u)\cdot\alpha^{-1}(u, y). \tag{4.34}$$

(4.34)就是(4.30)的逆转公式．为了便于和(二)中的两种类型的逆转公式作比较，记

$$\begin{aligned}\varphi(y, u)&=\alpha(u, y),\\ \psi(y, u)&=\alpha^{-1}(u, y).\end{aligned} \tag{4.35}$$

于是 $$\varphi(u, u)\neq 0, \quad \psi(u, u)\neq 0,$$

$$当\ u\not\leqslant y\ 时, \quad \varphi(y, u)=\psi(y, u)=0.$$

这时候，只要 $a(0)\neq 0$，就有

$$b(y)=\sum_{0\leqslant u\leqslant y}\varphi(y, u)\cdot a(u)\Rightarrow a(y)=\sum_{0\leqslant u\leqslant y}\psi(y, u)\cdot b(u). \tag{4.36}$$

于是得

定理6（推广的第一型逆转公式） 如果对于任意的x、$y\in X$，有$\varphi(x,x)\neq 0$，$\varphi(x,y)=0$ $(y\nleq x)$，那末对于由X上实值"函数"$a(y)$确定的

$$b(y)=\sum_{0\leq u\leq y}\varphi(y,u)\cdot a(u), \tag{4.37}$$

必有逆转公式

$$a(y)=\sum_{0\leq u\leq y}\psi(y,u)\cdot b(u), \tag{4.38}$$

其中$\psi(y,u)$确定的方法为：令

$$\alpha(u,y)=\varphi(y,u). \tag{4.39}$$

于是$\alpha\in F$，α在F存在逆元α^{-1}，取

$$\psi(y,u)=\alpha^{-1}(u,y). \tag{4.40}$$

【证】 当$a(0)\neq 0$时，逆转公式已在前面证明了．现在证明它在$a(0)=0$时也成立．令

$$\hat{a}(y)=a(y)+c\delta(0,y)$$

$(c\neq 0$，δ为F中单位元)，那末$\hat{a}(0)=c\neq 0$，于是由(4.36)，对于

$$\hat{b}(y)=\sum_{0\leq u\leq y}\varphi(y,u)\cdot\hat{a}(u)$$

应有逆转公式

$$\hat{a}(y)=\sum_{0\leq u\leq y}\psi(y,u)\hat{b}(u)$$

成立．但是由$\hat{a}(y)$的定义可知

$$\begin{aligned}\hat{b}(y)&=\sum_{0\leq v\leq y}\varphi(y,v)[a(v)+c\delta(0,v)]\\&=b(y)+c\sum_{0\leq v\leq y}\varphi(y,v)\delta(0,y)\\&=b(y)+c\cdot\varphi(0,0)\delta(0,y)\end{aligned}$$

所以（因为$y=0$时，

$$\sum_{0\leq v\leq y}\varphi(y,v)=\varphi(0,0);$$

$y\neq 0$时，

$$\sum_{0\leq v\leq y}\varphi(y,v)\cdot\delta(0,y)=0.)$$

$$\begin{aligned}&a(y)-\sum_{0\leq u\leq y}\psi(y,u)\cdot b(u)\\&=[\hat{a}(y)-c\delta(0,y)]-\sum_{0\leq u\leq y}\psi(y,u)\cdot b(u)\\&=\sum_{0\leq u\leq y}\psi(y,u)\hat{b}(u)-c\delta(0,y)-\sum_{0\leq u\leq y}\psi(y,u)\cdot b(u)\\&=\sum_{0\leq u\leq y}\psi(y,u)[\hat{b}(u)-b(u)]-c\delta(0,y)\end{aligned}$$

$$=\sum_{0<u\leq y}\psi(y,u)[c\varphi(0,0)\delta(0,u)]-c\delta(0,y)$$
$$=c\varphi(0,0)[\sum_{0<u\leq y}\psi(y,u)\cdot\delta(0,u)]-c\delta(0,y)$$
$$=c\varphi(0,0)\sum_{0<u\leq y}\alpha^{-1}(u,y)\cdot\delta(0,u)-c\delta(0,y)$$
$$=c\varphi(0,0)(\delta*\alpha^{-1})(0,y)-c\delta(0,y)\quad(\because\quad\delta*\alpha^{-1}=\alpha^{-1})$$
$$=c\varphi(0,0)\alpha^{-1}(0,y)-c\delta(0,y)$$
$$=c[\alpha(0,0)\alpha^{-1}(0,y)-\delta(0,y)]\quad(\because\quad\alpha*\alpha^{-1}=\delta)$$
$$=c[(\alpha*\alpha^{-1})(0,y)-\delta(0,y)]=0.$$
这说明在 $a(0)=0$ 时，逆转公式还是成立的. ▌

如果 X 是例 1 中的全体非负整数，那末定理 6 就变为：

若 $$b_m=\sum_{k=0}^{m}\varphi(m,k)a_k,\quad 则\quad a_m=\sum_{k=0}^{m}\psi(m,k)b_k$$

这就是(二)中的第一逆转公式.

对于一般的 φ，可以通过下述路线来确定 ψ：

$$\varphi\longrightarrow\alpha\xrightarrow{\text{递推}}\alpha^{-1}\longrightarrow\psi.$$

这是一个一般的原则. 对于某些特殊情形，例如组合变换和斯特林变换，则有[由 4.2 及(二)]

组合变换：$\varphi(m,k)=(-1)^kC_m^k$，此时 $\psi=\varphi$；

斯特林变换：$\varphi(m,k)=S(m,k)$，此时 $\psi(m,k)=s(m,k)$.

如果局部有限的半序集 X 有最大元 N：对任意的 $x\in X$，均有 $x\leq N$. 现在研究 X 中如下的逆序 ⩽⃝，定义

$$x ⩽⃝ y\quad 当且仅当\ y\leq x\quad (对任意的\ x,\ y\in X).$$

于是 ⩽⃝ 满足

1° $x ⩽⃝ x$；

2° 若 $x ⩽⃝ y$，$y ⩽⃝ x$，则 $x=y$；

3° 若 $x ⩽⃝ y$，$y ⩽⃝ z$，则 $x ⩽⃝ z$.

(请读者自己证明一下.)

而且(X, ⩽⃝)也是局部有限的半序集，且以 N 为它的最小元.

为了易于区别，我们把原来的半序“$\leq$”下的半序集 X 改记为 $(X,\leq)$，把定理 5 中的群$(F,*)$改记为$(F_{X,\leq},*)$. 对于“逆”的半序 ⩽⃝ 而言，对应于定理 5 中的群记为$(F_{X,⩽⃝},*)$. 这时

$$\boldsymbol{F}_{X,\circledcirc}=\{\check{f}\mid\check{f}=\check{f}(x,\ y)\begin{cases}\neq 0, & x=y,\\ =0, & x\not\circledcirc y,\end{cases}\quad x,\ y\in X\}$$

$$=\{\check{f}\mid\check{f}=\check{f}(x,\ y)\begin{cases}\neq 0, & x=y,\\ =0, & y\not\circledcirc x,\end{cases}\quad x,\ y\in X\},$$

记 $\check{f}(x,\ y)=f(y,\ x)$, 那末

$$f\in\boldsymbol{F}_{X,\leqslant}\ \text{当且仅当}\ \check{f}\in\boldsymbol{F}_{X,\circledcirc}.$$

现在对$(X,\ \circledcirc)$写出第一型逆转公式: 取 $\alpha\in\boldsymbol{F}_{X,\leqslant}$,

$$b(y)=\sum_{\tilde{0}\circledcirc u\circledcirc y}\check{\alpha}(u,\ y)a(u)\Rightarrow a(y)=\sum_{\tilde{0}\circledcirc u\circledcirc y}\check{\alpha}^{-1}(u,\ y)b(u)\tag{4.41}$$

(这里 $\tilde{0}$ 表示$(X,\ \circledcirc)$的最小元).

但是$(X,\ \circledcirc)$的最小元 $\tilde{0}$ 就是$(X,\ \leqslant)$的最大元 $\boldsymbol{N}$. 于是上面的第一型逆转公式就可写成

$$b(y)=\sum_{y\leqslant u\leqslant N}\alpha(y,\ u)a(u)\Rightarrow a(y)=\sum_{y\leqslant u\leqslant N}\alpha^{-1}(y,\ u)b(u).$$

回忆 $\qquad \varphi(u,\ y)\equiv\alpha(y,\ u),\quad \psi(u,\ y)\equiv\alpha^{-1}(y,\ u),$

就得到如下的推广的第二逆转公式:

定理7(推广的第二型逆转公式) 如果 X 为有最大元素的局部有限半序集, 其最大元素为 $\boldsymbol{N}$. 又对于任意的 x、$y\in X$, $\varphi(x,\ x)\neq 0$; $\varphi(x,\ y)=0(y\not\leqslant x)$, 那末对于由 X 上实值"函数" $a(y)$确定的

$$b(y)=\sum_{y\leqslant u\leqslant N}\varphi(u,\ y)\cdot a(u),\tag{4.42}$$

必有逆转公式

$$a(y)=\sum_{y\leqslant u\leqslant N}\psi(u,\ y)\cdot b(u)\tag{4.43}$$

其中 $\psi(u,\ y)$的确定方法为: 令

$$\alpha(y,\ u)=\varphi(u,\ y),$$

于是 $\alpha\in\boldsymbol{F}$(即 $\boldsymbol{F}_{X,\leqslant}$), α 在 $\boldsymbol{F}$ 的逆元为 α^{-1}, 而

$$\psi(u,\ y)=\alpha^{-1}(y,\ u).$$

(即由 φ 确定 ψ 的规则与推广的第一逆转公式相同.)

如果 X 是例 2 中的全体在$[0,\ n]$之间的整数, 那末定理 7 变成为:

若 $\qquad b_m=\sum_{k=m}^{n}\varphi(k,\ m)a_k,\quad$ 则 $\quad a_m=\sum_{k=m}^{n}\psi(k,\ m)b_k.$

这就是(二)中的第二逆转公式.

上面的讨论使我们在原则上可以造很多变换和逆转公式.

除了组合变换、斯特林变换外，常用的变换及逆转公式还有麦比乌斯逆转公式(第一型).

(四) 麦比乌斯逆转公式

上段讨论的重要特例是麦比乌斯逆转公式，这是数数的一个重要方法.

设 X 为局部有限的半序集，$\xi\in X$，$\xi=\xi(x, y)$ 称为黎曼函数，如果下述条件满足:

$$\xi(x, y)=\begin{cases}1, & x\leqslant y,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases} \tag{4.44}$$

于是 $\xi\in \boldsymbol{F}$，有逆元 ξ^{-1}，记 $\mu=\xi^{-1}$，则按 $\mu(x, y)=\xi^{-1}(x,y)$ 的定义，应有

$$\mu(x, y)=\begin{cases}1, & x=y,\\ -\sum\limits_{\substack{x\leqslant u\leqslant y\\ u\neq y}}\mu(x, u), & x\leqslant y,\ x\neq y,\\ 0, & x\not\leqslant y.\end{cases} \tag{4.45}$$

$\mu(x, y)$ 称为麦比乌斯函数.

在(三)的逆转公式中，取 $\alpha=\xi$，于是 $\alpha^{-1}=\mu$，

$$\varphi(x, y)=\xi(y, x)=\begin{cases}1, & y\leqslant x,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$\psi(x, y)=\mu(y, x).$$

从而作为(三)的特例，有

定理8(麦比乌斯第一逆转公式) 设 $f(x)$ 为局部有限半序集 X 上的一个实值“函数”，若

$$g(y)=\sum_{0\leqslant u\leqslant y}f(u), \tag{4.46}$$

那末有逆转公式

$$f(y)=\sum_{0\leqslant u\leqslant y}\mu(u, y)\cdot g(u). \tag{4.47}$$

【证】 因为

$$g(y)=\sum_{0\leqslant u\leqslant y} f(u)=\sum_{0\leqslant u\leqslant y}\varphi(y,\ u)f(u),$$

由推广的第一逆转公式就得到

$$f(y)=\sum_{0\leqslant u\leqslant y}\psi(y,\ u)\cdot f(u)=\sum_{0\leqslant u\leqslant y}\mu(u,\ y)\cdot g(u).\ 】$$

定理 9(麦比乌斯第二逆转公式) 若 $f(x)$ 为具有最大元 $\boldsymbol{N}$ 的局部有限半序集 X 上的一个实值"函数",若

$$g(y)=\sum_{y\leqslant u\leqslant N} f(u), \tag{4.48}$$

那末有逆转公式

$$f(y)=\sum_{y\leqslant u\leqslant N}\mu(y,\ u)\cdot g(u). \tag{4.49}$$

【证】 因为

$$g(y)=\sum_{y\leqslant u\leqslant N} f(u)=\sum_{y\leqslant u\leqslant N}\varphi(u,\ y)f(u),$$

由推广的第二逆转公式就得到

$$f(y)=\sum_{y\leqslant u\leqslant N}\psi(u,\ y)\cdot g(u)=\sum_{y\leqslant u\leqslant N}\mu(y,\ u)\cdot g(u).\ 】$$

在具体应用麦比乌斯逆转公式时，首先需要求出麦比乌斯函数的具体形式.

【例 5】 若 X 是全体正整数，"$\leqslant$"是普通的大小关系，这时最小元是 1，那末由麦比乌斯函数的定义(在此改写 u 为 k)，得

$$\mu(1,\ 2)=-\sum_{1\leqslant k<2}\mu(1,\ k)=-\mu(1,\ 1)=-1,$$

$$\begin{aligned}\mu(1,\ 3)&=-\sum_{1\leqslant k<3}\mu(1,\ k)\\&=-[\mu(1,\ 1)+\mu(1,\ 2)]=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu(1,\ 4)&=-\sum_{1\leqslant k<4}\mu(1,\ k)\\&=-[\mu(1,\ 1)+\mu(1,\ 2)+\mu(1,\ 3)]=0.\end{aligned}$$

用数学归纳法就可以证明

$$\mu(1,\ m)=0\quad(m>2).$$

完全类似地可以证明

$$\left.\begin{aligned}\mu(n,\ n+1)&=-1,\\ \mu(n,\ m)&=0.\end{aligned}\right.\quad (m>n+1).$$

因此
$$\mu(k,\ m)=\begin{cases}1, & m=k,\\ -1, & m=k+1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

由麦比乌斯第一逆转公式可知:

若
$$g(m)=\sum_{k=1}^{m}f(k),$$

则
$$f(m)=\sum_{k=1}^{m}\mu(k,\ m)g(k)=g(m)-g(m-1).$$

若只考虑 1 至 n 这段正整数，那末由麦比乌斯第二逆转公式可知

若
$$g(m)=\sum_{k=m}^{n}f(k),$$

则
$$f(m)=\sum_{k=m}^{n}\mu(m,\ k)\cdot g(k)=g(m)-g(m+1).$$

这样的两个逆转公式其实可以不必用麦比乌斯函数而毫不费力地直接得到.

【例 6】 X 是全体正整数，半序如例 3 所示，即"$x\leqslant y$ 当且仅当 x 能整除 y(记为 $x|y$)". 这时最小元素为 1.

现在来求麦比乌斯函数的明显表达式. 首先注意：由麦比乌斯函数的定义，有(当 $x\leqslant y$ 且 $y\neq x$ 时)

$$\sum_{x\leqslant u\leqslant y}\mu(x,\ u)=0.$$

在此就是对任意 $n>1$, 有(令 $x=k,\ u=j,\ y=nk$)

$$\sum_{\substack{k,j\\ j|nk}}\mu(k,\ j)=0. \qquad \text{(A)}$$

要严格地算出 $\mu(k,\ m)$, 需要多次应用数学归纳法.

设 $p_1, \cdots, p_l, \cdots$ 等代表不同的、大于1的质数。

$$\mu(k, k)=1, \quad \mu(k, m)=0 \quad (\text{当 } k\nmid m \text{ 时})$$

是 μ 的定义所要求的. 显然有

$$\mu(k, p_1k)=-\mu(k, k)=-1,$$

$$\begin{aligned}\mu(k, p_1p_2k)&=-[\mu(k, k)+\mu(k, p_1k)+\mu(k, p_2k)]\\&=-[1-1-1]=1.\end{aligned}$$

先用数学归纳法证明

$$\mu(k, p_1\cdots p_nk)=(-1)^n. \tag{B}$$

假设 $n\leqslant l$ 时,上述结论成立($n=1, 2$ 时显然是成立的),今考察 $n=l+1$ 时的情况:

$$\begin{aligned}\mu(k, p_1\cdots p_{l+1}k)=-\Big[&\mu(k, k)+\sum_{i=1}^{l+1}\mu(k, p_ik)\\&+\cdots+\sum_{i,j=1}^{l+1}\mu(k, p_ip_jk)\\&+\cdots+\sum_{i_1,\cdots,i_l=1}^{l+1}\mu(k, p_{i_1}\cdots p_{i_l}k)\Big]\end{aligned}$$

由归纳法假定,右式为

$$\begin{aligned}&-[(-1)^0+C_{l+1}^1(-1)^1+C_{l+1}^2(-1)^2+\cdots+C_{l+1}^l(-1)^l]\\&=-[(1+(-1)]^{l+1}-C_{l+1}^{l+1}(-1)^{l+1}]\\&=-[-(-1)^{l+1}]=(-1)^{l+1}.\end{aligned}$$

因此 $$\mu(k, p_1\cdots p_{l+1}k)=(-1)^{l+1}.$$

即结论对 $n=l+1$ 成立。根据归纳法原理知对一切 n, (B) 均成立.

其次证在 $m_1, \cdots, m_n$ 中有一个大于1时就有

$$\mu(k, p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_n^{m_n}k)=0. \tag{C}$$

不妨假定 $m_1\geqslant 2$.

证明上式的办法是逐步递推,其实质就是数学归纳法. 由于用数学归纳法写出这证明的全部过程太繁, 反而掩盖了实

质，所以在此就不详写这个过程了，而仅纲要地列出这种逐步递推的思路.

显然有

$$\mu(k,\ p_1^2k)=-[\mu(k,\ k)+\mu(k,\ p_1k)]=-[1-1]=0,$$

于是证明的路线为：

$$\begin{aligned}\mu(k,\ p_1^2k)=0&\to\mu(k,\ p_1^3k)=0\to\cdots\to\mu(k,\ p_1^{m_1}k)\\&=0\to\mu(k,\ p_1^2p_2k)=0\to\mu(k,\ p_1^3p_2k)\\&=0\to\cdots\to\mu(k,\ p_1^{m_1}p_2k)=0\to\mu(k,\ p_1^2p_2p_3k)\\&=0\to\mu(k,\ p_1^3p_2p_3k)=0\to\cdots\to\mu(k,\ p_1^{m_1}p_2p_3k)\\&=0\to\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\to\mu(k,p_1^2p_2\cdots p_nk)=0&\to\cdots\to\mu(k,\ p_1^{m_1}p_2\cdots p_nk)\\&=0\to\mu(k,\ p_1^{m_1}p_2^2k)\\&=0\to\cdots\to\mu(k,\ p_1^{m_1}p_2^{m_2}k)\\&=0\to\mu(k,\ p_1^{m_1}p_2^{m_2}p_3k)\\&=0\to\cdots\to\mu(k,\ p_1^{m_1}p_2^{m_2}p_3^{m_3}k)\\&=0\to\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\to\mu(k,\ p_1^{m_1}\cdots p_{n-1}^{m_{n-1}}p_nk)\\&\quad=0\to\cdots\to\mu(k,\ p_1^{m_1}\cdots p_{n-1}^{m_{n-1}}p_n^{m_n}k)=0.\end{aligned}$$

证明了(C)，就得到麦比乌斯函数

$$\mu(k,\ m)=\begin{cases}1, & 若\ k=m,\\(-1)^n, & 若\ m=p_1\cdots p_nk;\ p_1,\ \cdots,\ p_n\ 为不同质数,\\0, & 其它情形.\end{cases}$$

由麦比乌斯第一逆转公式可知：

若 $$g(m)=\sum_{k/m}f(k),$$

则 $$f(m)=\sum_{k/m}\mu(k,\ m)\cdot g(k).$$

这是初等数论中的一个有名公式.

【例7】 若 A 是一个有限集, A 的一切子集 S 的全体组成一个半序集 X(见例4). 我们来求它的麦比乌斯函数. 对于 $S\in X$, 有 $S\subset A$.

$$\mu(S,\ S)=1,$$

$$\mu(S,\ S\cup\{x_1\})=-\mu(S,\ S)=-1\quad(x_1\in A-S)$$

$$\mu(S,\ S\cup\{x_1,\ x_2\})=-[\mu(S,\ S)+\mu(S,\ S\cup\{x_1\})+\mu(S,\ S\cup\{x_2\})]=1\quad(x_1,\ x_2\in A-S).$$

用数学归纳法可证: 对 $x_1,\ \cdots,\ x_n\in A-S$, 有

$$\mu(S,\ S\cup\{x_1,\ \cdots,\ x_n\})=(-1)^n.$$

因此对 $S_1,\ S_2\subset A$, 有

$$\mu(S_1,\ S_2)=\begin{cases}(-1)^{n(S_2)-n(S_1)}, & S_1\subset S_2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

由麦比乌斯第一逆转公式:

若 $$g(S_2)=\sum_{S_1\subset S_2}f(S_1),$$

则 $$f(S_2)=\sum_{S_1\subset S_2}(-1)^{n(S_2)-n(S_1)}g(S_1).$$

特别, 若 $$g(S_2)=\sum_{S_1\subset S_2}(-1)^{n(S_1)}f(S_1),$$

则 $$(-1)^{n(S_2)}f(S_2)=\sum_{S_1\subset S_2}(-1)^{n(S_2)-n(S_1)}g(S_1),$$

即 $$f(S_2)=\sum_{S_1\subset S_2}(-1)^{-n(S_1)}g(S_1)=\sum_{S_1\subset S_2}(-1)^{n(S_1)}g(S_1).$$

这就得到对称形式的公式:

若 $$g(S_2)=\sum_{S_1\subset S_2}(-1)^{n(S_1)}f(S_1),$$

则 $$f(S_2)=\sum_{S_1\subset S_2}(-1)^{n(S_1)}g(S_1).$$

作为麦比乌斯逆转公式的应用, 我们重新计算一次 $A(n,\ m)$, 即计算把 n 个不同的球放到 m 个不同的格中, 且

不许出格或空格的放法.

设这 m 个格子分别标以记号 $x_1, x_2, \cdots, x_m$, 于是得到一个有限集 $A=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$. 对于 A 的一个子集 $S=\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_l}\}$, 令 $R(S)$ 为 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_l}$ 这些格不许空, 而此外的所有格全空的放法数; $R^0(S)$ 为 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_l}$ 这些格以外全空的放法数. 那末

$$R^0(S_2)=\sum_{S_1\subset S_2} R(S_1).$$

由例 7 中的麦比乌斯第一逆转公式可知

$$R(S_2)=\sum_{S_1\subset S_2}(-1)^{n(S_2)-n(S_1)}R^0(S_1).$$

特别, 注意 $n(A)=m$, 有

$$A(n, m)=R(A)=\sum_{S_1\subset A}(-1)^{m-n(S_1)}R^0(S_1)$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\sum_{\substack{S_1\subset A\\ n(S_1)=k}}(-1)^{m-k}R^0(S_1).$$

但是当 $n(S_1)=k$ 时, $R^0(S_1)=k^n$, 所以

$$A(n, m)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{\substack{n(S_1)=k\\ S_1\subset A}}(-1)^{m-k}k^n$$

$$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}k^n\Big(\sum_{\substack{n(S_1)=k\\ S_1\subset A}}1\Big).$$

又 $\sum\limits_{\substack{n(S_1)=k\\ S_1\subset A}}1$ 等于 A 的有 k 个元素的子集的数目, 这是一个组合问题, 这个数应等于 C_m^k. 所以

$$A(n, m)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}C_m^k k^n.$$

或(令 $k'=m-k$)

$$A(n, m)=\sum_{k'=0}^{m}(-1)^{k'}C_m^{k'}(m-k')^n.$$

归纳本节要点

本节讲了几种数数的方法，其中以递推法为常见．递推法的实质就是用数学归纳法数数．母函数法一般需与数学分析中的幂级数结合起来，因此本节中未能展开讨论．变换方法也是数数的重要手段，本节中介绍了：

局部有限半序集上的第一和第二型变换及其逆变换公式（逆转公式）．

作为上述变换的特例，介绍了局部有限半序集上的麦比乌斯变换及其逆转公式；在不同的半序集，出现在这个逆变换中的麦比乌斯函数各自具有它们具体的形式．

除麦比乌斯变换外，还有组合变换、斯特林变换等，它们都是一般有限变换的特例．

习　题　4·4

1．平面上 n 条彼此不同的直线最多可能把平面分成多少个不同的部分？

[提示：先推导它的递推公式．]

2．从可重复排列的定义出发（不要从它的计算公式出发）推导可重复排列数 R_n^m 应满足的递推公式．

3．直接用不可重复排列的涵义，导出它（排列数 P_n^m）应满足的递推公式．

4．直接用不可重复组合的涵义，导出这个组合数 C_n^m 应满足的递推公式．

*5．圆桌上坐着 n 个人，要在其中任选 m 个人（$n\geqslant 2m-1$），问：

(1) 任何相邻两人都不能同时被选上的不同选法数是多少？

(2) 除第1人与第 n 人能允许同时选上而其它相邻的两人都不能同时选上的不同选法数是多少？

[提示：设(1)、(2)中的选法数分别为 $g_m(n)$，$f_m(n)$，那末有递推式

$$\begin{cases} g_m(n)=f_{m-1}(n-3)+f_m(n-1), \\ f_m(n)=f_{m-1}(n-2)+f_m(n-1); \end{cases}$$

$f_1(n)=n; f_m(2m-1)=1.$]

6. 令 $L(n, k)$ 为

$$(-x)_n=\sum_{k=0}^{n} L(n, k)(x)_k$$

中的系数[记住 $(-x)_n=(-x)(-x-1)\cdots(-x-n+1)$]，推导 $L(n, k)$ 的递推公式。并证明

$$(x)_n=\sum_{k=0}^{n} L(n, k)(-x)_k.$$

7. 写出用 $L(n, k)$ 作为变换系数的第一型和第二型逆转公式。

8. 对于一个数列 $\{a_n\}$，定义

一阶差 $\Delta a_k=a_{k+1}-a_k$,

二阶差 $\Delta^2 a_k=\Delta a_{k+1}-\Delta a_k$,

....

m 阶差 $\Delta^m a_k=\Delta^{m-1}a_{k+1}-\Delta^{m-1}a_k$.

如果存在一个 m，使 $\Delta^{m+1}a_k\equiv 0$（不管什么 k），则称 $\{a_n\}$ 为 m 阶等差数列。

试证：

(1) $\{a_n\}$ 为 m 阶等差数列的充分必要条件为：存在 $C_0, C_1, \cdots, C_m$，使

$$\{a_n\}=C_0n^m+C_1n^{m-1}+\cdots+C_{m-1}n+C_m;$$

(2) 对任何数列均有

$$a_n=a_{n-k}+C_k^1\Delta a_{n-k}+C_k^2\Delta^2 a_{n-k}+\cdots+C_k^k\Delta^k a_{n-k}.$$

特别，若 $\{a_n\}$ 为 m 阶等差数列，则

$$a_n=a_1+C_{n-1}^1\Delta a_1+C_{n-1}^2\Delta^2 a_1+\cdots+C_{n-1}^m\Delta^m a_1.$$

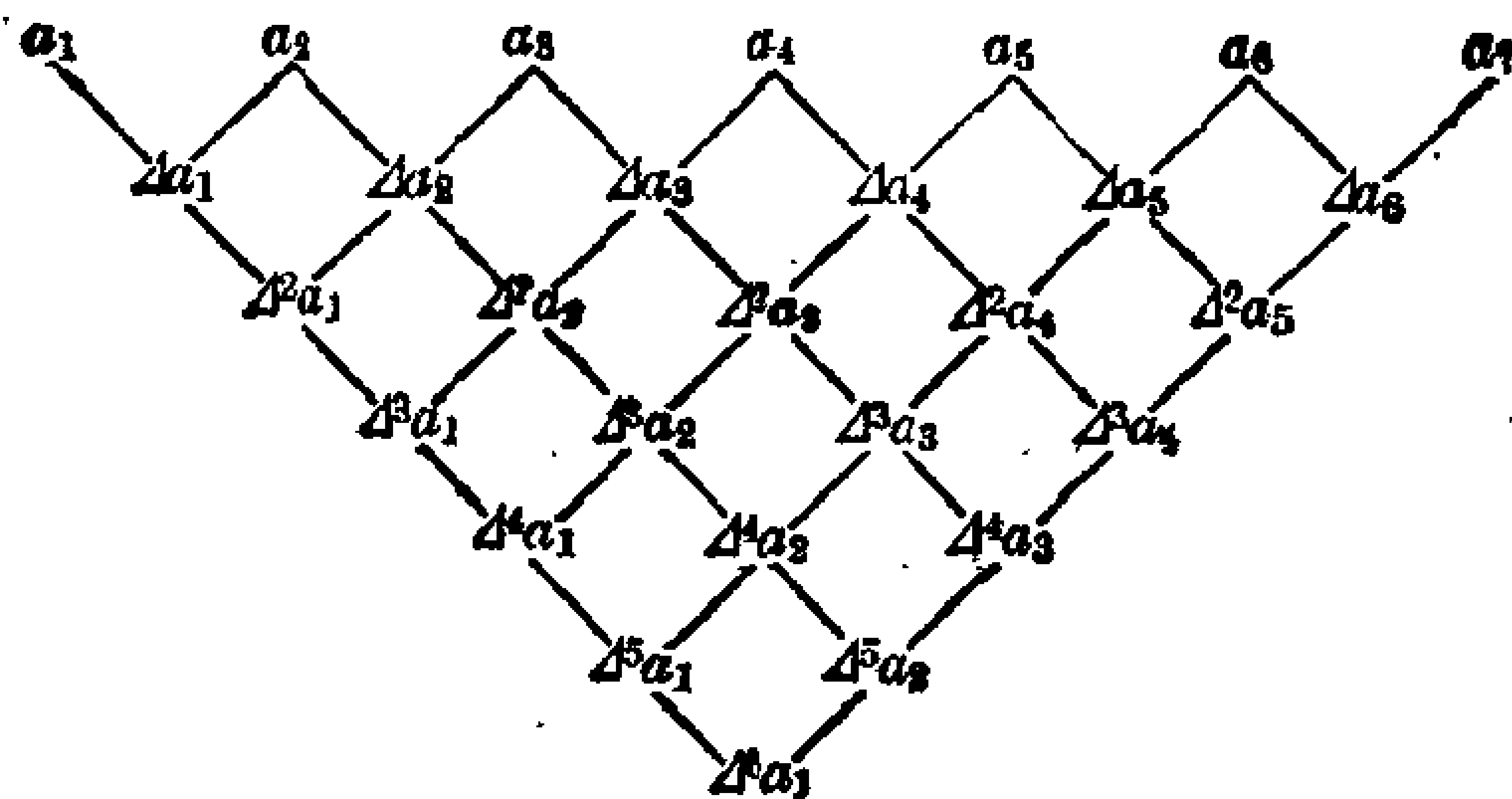
9. 在下述各小题中分别求 $a_1, \Delta a_1, \Delta^2 a_1, \cdots, \Delta^6 a_1$，并写出通项 a_n 的公式：

(1) $a_n=\sum_{k=1}^{n} k^2$;

(2) $a_n=\sum_{k=1}^{n} k^3$;

(3) $a_n=\sum_{k=1}^{n} k^4$.

注意 在计算各阶差分时，可用下述计算格式：



10．若 $\{a_n\}$ 为 m 阶等差数列，证明

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + C_n^2 \Delta a_1 + C_n^3 \Delta^2 a_1 + \cdots + C_n^{m+1} \Delta^m a_1$$

[提示：先证明 $C_l^l + C_{l+1}^l + \cdots + C_{n-1}^l = C_n^{l+1}$.]

11．如果 $a = p_1 p_2 \cdots p_n$，p_i 是不同的质数，问把 a 分解成 $m(m<n)$ 个不等于1的因子的乘积的不同方式有多少种？

12．证明

$$(C_{2n}^0)^2 - (C_{2n}^1)^2 + \cdots + (-1)^k (C_{2n}^k)^2 + \cdots + (C_{2n}^{2n})^2 = (-1)^n C_{2n}^n.$$

[提示：用 $(1-x)^{2n}$ 及 $(1+x)^{2n}$ 作为母函数.]

13．用排列的涵义证明范德蒙公式

$$(x+y)_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x)_k (y)_{n-k}.$$

14．用有序占位的涵义证明纳隆公式

$$[x+y]^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k [x]^k \cdot [y]^{n-k}.$$

第五节　狄利克莱抽屉原则及其推广

狄利克莱抽屉原则是一个极其初等然而应用又较多的初等数学原则．严格说来，它不应放在本章之中，但是因为在本书中没有合适的章节安排它，同时它与本章第三节有一定关系，所以权且放在本章．

狄利克莱抽屉原则 当$n>m$时，n个球放进m个格，而且同时要求每格不能超过1个(排斥性，但可以有空格)的放法数为0.

也可以这样说：

$m+1$个球放进m个抽屉，不管如何放，总有一个抽屉里至少有两个球.

如果说得稍微广一些，那就是：

$mr+1$个(或更多的)球放进m个抽屉，那末不管如何放，总有一个抽屉里至少有$r+1$个球.

更一般些就是：

$q_1+\cdots+q_m+1$个(或更多的)球放进m个抽屉，那末不管如何放，下述m个事件中总有一个成立：第一个抽屉中至少有q_1+1个；第二个抽屉中至少有q_2+1个，……，第m个抽屉中至少有q_m+1个.

它的证明是极其简单的．我们用反证法，设这m个事件都不成立，那末第一个格子中的球数$\leqslant q_1$，第二格中球数$\leqslant q_2$，……，第m格中球数$\leqslant q_m$，这样总共放的球数$\leqslant q_1+\cdots+q_m$，这与原来给定的条件(放$q_1+\cdots+q_m+1$或更多的球)相矛盾，因此，这m件事中至少有一件成立．结论得证.

抽屉原则的内容是极其朴实的，但是它的应用却很广．在具体应用这个模型时，首先要认准在所论的问题中什么是“格子”，什么是“球”.

【例1】 证明：从单位长的正方形中任取五个点，那末其中必有两个点的距离小于$\frac{1}{\sqrt{2}}$.

【证】 把这单位正方形分成如图4-5那样的四个小正方形，其中每个边长为1/2．把这些小正方形看成格子，取的质

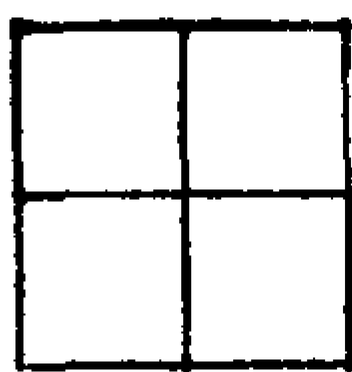


图 4-5

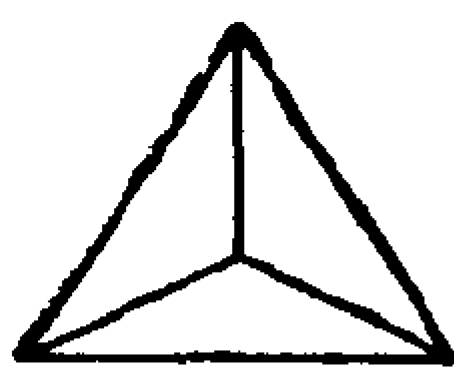


图 4-6

点看成球. 因为五个球放在四个格子中，按抽屉原则必有某一格中有两个球. 也就是必有两个质点在同一个小正方形中. 于是这两点的距离必小于这个小正方形的对角线的长

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}.\ \rrbracket$$

【例 2】 在单位边长的正三角形中，任取七个点，证明其中必有三个点联成的小三角形的面积不超过 $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

【证】 把这三角形的重心与各顶点联起来，得到三个小三角形(如图 4-6). 把这些小三角形看成"格子"，把要取的点看成球. 由抽屉原则知，七个球放进三个格子，必有某格中至少有三个球. 也就是：任取的七点中必有三点在上述的某个小三角形中. 因此，这三个点联成的三角形的面积不会超过该小三角形的面积 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}$.]

【例 3】 有 n 个人，指定其中任一个人，计算他在其他 $n-1$ 个人中熟人的个数. 则必有两个人具有相等数目的熟人.

【证】 设第一个人，第二个人，……，第 n 个人的熟人个数分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$, 那末它们都不超过 $n-1$, 即它们是不超过 $n-1$ 的 n 个正整数. 按抽屉原则：这 n 个数中必有两个数是彼此相等的.]

【例 4】 证明：如果一个小数

$$0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots\quad(0\leqslant\alpha_k\leqslant9,\ \alpha_k\ 整数)$$

满足按模 10 递推的方程:

$$\alpha_{n+1} \equiv m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_n\alpha_n \pmod{10}$$

[其中(mod 10)表示等式两边并不真正相等而只是被 10 除后的余数相等],那末这个小数一定是有理数.

【证】 只需证明这个小数是循环小数就够了. 取 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, $(\alpha_{1+1}, \alpha_{2+1}, \cdots, \alpha_{n+1})$, $\cdots$, $(\alpha_{1+k}, \alpha_{2+k}, \cdots, \alpha_{n+k})$, $\cdots$, 这样的每个 n 位有序数作为一个球,再把 $(0, 0, \cdots, 0, 0)$, $(0, \cdots, 0, 1)$, $\cdots$, $(0, \cdots, 0, 9)$, $\cdots$, $(9, \cdots, 9, 0)$, $\cdots$, $(9, \cdots, 9, 9)$ 等 10^n 个 n 位有序数分别看成 10^n 个格子. $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\cdots$, $(\alpha_{N+1}, \cdots, \alpha_{N+n})$ 这 N 个球必须"放到"(取值)这 10^n 个格中的某个格内, 按抽屉原则, 只要 N 充分大, 就必然在某一格内有两个球,例如 $(\alpha_{p_1+1}, \cdots, \alpha_{p_1+n})$, $(\alpha_{p_2+1}, \cdots, \alpha_{p_2+n})$ $(p_1 < p_2 < N)$, 这就是说

$$\alpha_{p_1+1} = \alpha_{p_2+1}, \ \cdots, \ \alpha_{p_1+n} = \alpha_{p_2+n}.$$

于是按递推公式,对一切 k 应有

$$\alpha_{p_1+k} \equiv \alpha_{p_2+k} \pmod{10}.$$

但是 α_{p_1+k}, α_{p_2+k} 均在 0, 1, $\cdots$, 9 之中,所以

$$\alpha_{p_1+k} = \alpha_{p_2+k}.$$

这说明这个小数是循环小数. 】

【例 5】 从 1, 2, $\cdots$, $2n$ 这 $2n$ 个正整数中任取 $n+1$ 个,证明其中必存在两个数,使一个数是另一个数的整数倍.

解: 任意一个整数一定可以写成 $2^k m$ 的形式, 而且其中 m 是奇数. 所以对 1, 2, $\cdots$, $2n$ 这 $2n$ 个数, 对应的 m 必是 1, 3, 5, $\cdots$, $2n-1$ 这 n 个数中之一. 今在 1, 2, $\cdots$, $2n$ 中任取 $n+1$ 个数,因此,按抽屉原则,其中必有两个数对应于相同的 m, 即这两个数为

$$2^k m \quad 及 \quad 2^l m.$$

不妨设 $k<l$, 于是 $2^k m$ 能整除 $2^l m$.

【例6】 任给m个整数$n_1, \cdots, n_m$, 证明必有k、l, 使$1\leqslant k\leqslant k+l\leqslant m$, 且

$$n_k+n_{k+1}+\cdots+n_{k+l} \quad \text{能被}m\text{整除}.$$

【证】 任意一个整数被m除后的余数只能为0, 1, …, $m-1$这m个数. 对n_1, n_1+n_2, $n_1+n_2+n_3$, …, $n_1+n_2+\cdots+n_m$这m个数可分两种情况: 第一种情况: 其中有一个数被m除后余数为0, 这就是我们所要找的; 第二种情况: 这m个数中没有一个数被m除后余数为0, 由于一共只有$m-1$个不同的余数, 按抽屉原则可知: 这m个数中必有两个数被m除后余数相等, 设一个是$n_1+n_2+\cdots+n_k$, 另一个是$n_1+n_2+\cdots+n_{k+l}$, 因此, 它们的差$n_{k+1}+\cdots+n_{k+l}$就能被m整除. ▌

【例7】 有一个小孩在学习外语, 他规定自己每天至少要记住一个生字. 但是为了易于复习巩固, 他又规定了每个月记的生字总数不能超过m个. 这样, 一共学习了n个月(每月按30天计算), 试证明只要$l\leqslant(60-m)n-1$, 那末在这n个月中一定存在连续的几天, 他在这些天中一共记了l个生字.

【证】 设到第k天为止, 这孩子一共记住a_k个生字. 因为每天至少要记一个新的生字, 所以$1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{30n}$. 又由于每月不超过$m$个生字, 故有

$$a_{30n}\leqslant nm.$$

因此 $$a_1+l<a_2+l<\cdots<a_{30n}+l\leqslant nm+l.$$

但是$l\leqslant(60-m)n-1$, 也就是$60n\geqslant nm+l+1$, 于是在$a_1, \cdots, a_{30n}, a_1+l, \cdots, a_{30n}+l$这$60n$个不超于$nm+l$的正整数中, 按抽屉原则, 必有两个是一样的(因为总数$60n$总比界限$nm+l$大). 这两个既不能都在$a_1, \cdots, a_{30n}$中, 也不能都在$a_1+l, \cdots, a_{30n}+l$中. 因此存在a_j与a_i+l, 使

$$a_j = a_i + l.$$

即 $a_j - a_i = l$. 这就是说，从第 $i+1$ 天开始一直到第 j 天为止，这小孩一共记了 l 个生字. ▌

【例 8】 若空间中有 6 个点，其中任意三点不共线. 如果把这 6 个点两两用直线联起来，并且把这种直线或者涂以红色，或者涂以蓝色. 证明必定存在一个三边是同种颜色的三角形.

【证】 在这六个点中，任意一点 p_1 与其它五点有 5 条联线，按抽屉原则，这五条邻边至少有三条是相同颜色的，例如说 p_1p_2，p_1p_3，p_1p_4 这三条边全是红色的(或全是蓝色的). 如果 p_2p_3，p_3p_4，p_4p_2 全为蓝的(或相应地全为红的)，则三角形 $p_2p_3p_4$ 就是三边同色的三角形；如果 p_2p_3，p_3p_4，p_4p_2 不全为蓝的(或不全为红的)，那末总有一条边为红的，例如说 p_3p_4 为红的，于是三角形 $p_1p_3p_4$ 就是三边同色的三角形.

不论哪种情况，结论都是成立的. ▌

下面论述抽屉原则的推广——组合数学中有名的瑞姆赛定理. 在此只解释它的涵义，不给出它的证明. 为了能清楚地剖析它的直观意义，先从抽屉原则开始分析.

设有 n 个点，分别任意地涂以红、蓝两种色之一，那末对于任给的正整数 q，只要所给的点数充分多(即 n 充分大)，那末必定有 q 个点具有相同的颜色(事实上根据抽屉原则：只要 $n \geqslant 2(q-1)+1=2q-1$，就总有 q 个点具有相同的颜色，这里 $2q-1$ 是点数的下限，不能再少了).

现在如果不考虑点的涂色，而考虑两点之间联线(称它为边)的涂色. 设有 n 个点(无三点共线)，每两点之间的联线(边)涂以一种颜色：红或蓝，那末按例 8，只要点数充分多(即 n 充分大)，就一定存在 3 个点，它们之间的三条边(即联结这三个

点的三角形)具同一种颜色. 事实上，由例 8 只需 $n \geqslant 6$ 就可以了. 但 $n=5$ 却不行，例如在图 4-7 中实线表示红色，虚线表示蓝色的例子就说明了在 5 个点时，没有同色三角形. 在这例子中所有的三角形都是具有两色的边.

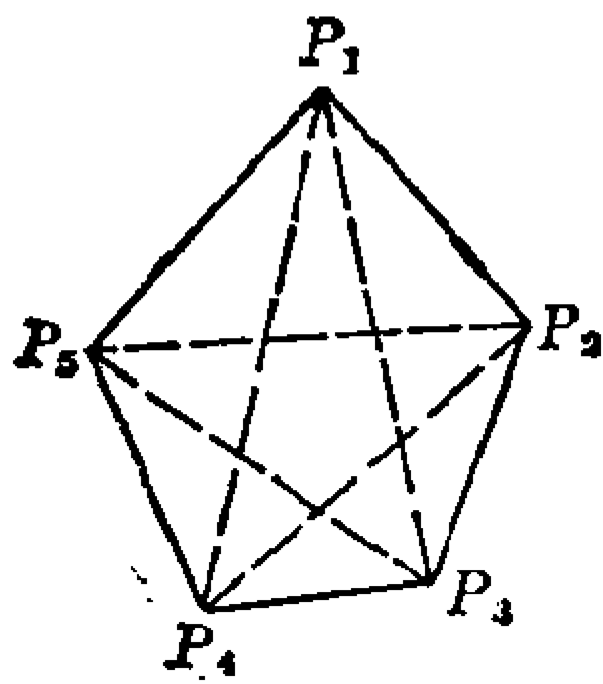


图 4-7

这说明 6 个点($n=6$)是存在同色三角形的下限.

这是瑞姆赛定理的最简单情形，略为一般的就是.

设有 n 个点(无三个共线)，每两点之间的联线(边)涂以一种颜色: 红或蓝. 那末对于任意的 $q \geqslant 2$，只要点数充分多(即 n 充分大)，就一定存在 q 个点，它们之间的一切边都具有相同的颜色.

再推广一步就是:

设有 n 个点(无三个共线)，每两点之间的联线涂以一种颜色: 红或蓝. 那末对任意的正整数 q_1、$q_2 \geqslant 2$，只要点数充分多(即 n 充分大)，则下列两者之一总成立: 要么存在 q_1 个点，其边均为红色；要么存在 q_2 个点，其边均为蓝色.

这一结论还可以推广到 m 种颜色的情况，称为二点结合(边)的瑞姆赛定理.

再进一步推广就是:

设有 n 个点(无四个共面)，将每三个点构成的三角形涂以一种颜色: 红或蓝. 那末对任意正整数 q_1、$q_2 \geqslant 3$，只要点数充分多(即 n 充分大)，则要么存在 q_1 个点，其中每三个点构成的三角形均为红色；要么存在 q_2 个点，其中每三个点构成的三角形均为蓝色.

设有 n 个点(无四个共面)，将每三个点构成的三角形涂

以 m 种颜色中的一种. 那末对任意正整数 $q_1, \cdots, q_m \geqslant 3$, 只要点数充分多(即 n 充分大), 则下述 m 件事实中总有一件成立:

存在 q_1 个点,其中每三个点构成的三角形都为第一种颜色;

存在 q_2 个点,其中每三个点构成的三角形都为第二种颜色;

……

存在 q_m 个点, 其中每三个点构成的三角形都为第 m 种颜色。

这个结论称为三点结合(三角形)的瑞姆赛定理.

这个定理还可以推广到多点结合的情形: 例如四点结合(四面体)及五点以上的结合,其直观意义就不明显了.但是在两点结合的情况下,要求这 n 个点中每三点不共线;在三点结合的情况下,要求这 n 个点中每四点不共面;在四点结合或更多点结合的情况下,对这 n 个点的条件就无法清楚地叙述了.所以,为了推广到多点(例如 r 个点)结合的情况,就需把两点结合及三点结合情况的瑞姆赛定理改为另一种叙述方式:

两点结合的瑞姆赛定理 设有 n 个元素组成一个集合 S. S 的子集中由只有两个元素组成的子集为 $A_1^{(2)}$、$A_2^{(2)}$、…、$A_{C_n^2}^{(2)}$(一共 C_n^2 个, 每个相当于一条边), 把这种子集的全体分成互不相交的 m 类(相当于涂了 m 种颜色), 那末对于任意的正整数 q_1、q_2、…、$q_m \geqslant 2$, 只要 S 的元素充分多(即 n 充分大),则下述 m 件事实中总有一件成立:

存在 S 的一个有 q_1 个元素的子集 S_1, S_1 的任意一个只有两个元素的子集都在第一类中;

存在 S 的一个有 q_2 个元素的子集 S_2, S_2 的任意一个只

有两个元素的子集都在第二类中；

……

存在 S 的一个有 q_m 个元素的子集 S_m，S_m 的任意一个只有两个元素的子集都在第m类中.

三点结合的瑞姆赛定理 设有 n 个元素组成的集合 S. S 的子集中由只有三个元素组成的子集为 $A_1^{(3)}$, $A_2^{(3)}$, …, $A_{C_n^3}^{(3)}$（一共 C_n^3 个，每个相当于一个三角形），把这种子集的全体分成互不相交的 m 类（相当于把各个三角形中的每一个涂以 m 种颜色中的一种），那末对于任意正整数 q_1, q_2, …, $q_m \geqslant 3$，只要 S 的元素充分多（即 n 充分大），则下述 m 件事实中总有一件成立：

存在 S 的一个有 q_1 个元素的子集 S_1，S_1 的任意一个只有三个元素的子集都在第一类中；

存在 S 的一个有 q_2 个元素的子集 S_2，S_2 的任意一个只有三个元素的子集都在第二类中；

……

存在 S 的一个有 q_m 个元素的子集 S_m，S_m 的任意一个只有三个元素的子集都在第 m 类中.

下面叙述最一般的瑞姆赛定理：

瑞姆赛定理 设有一个 n 个元素的集合 S. S 的子集中只有 r 个（r 为正整数）元素的子集为 $A_1^{(r)}$, $A_2^{(r)}$, …, $A_{C_n^r}^{(r)}$（一共 C_n^r 个），把这种子集的全体分成互不相交的 m 类，那末对于任意正整数 q_1, …, $q_m \geqslant r$，只要 n 充分大，则下述 m 件事实中总有一件成立：

存在 S 的一个有 q_1 个元素的子集 S_1，S_1 的任意一个具有 r 个元素的子集都在第一类中；

存在 S 的一个有 q_2 个元素的子集 S_2，S_2 的任意一个具

有 r 个元素的子集都在第二类中；

……

存在 S 的一个有 q_m 个元素的子集 S_m，S_m 的任意一个具有 r 个元素的子集都在第 m 类中.

使上述瑞姆赛定理成立的最小数 n 与 $q_1, q_2, \cdots, q_m, r$ 有关，记成 $N(q_1, \cdots, q_m; r)$，称为瑞姆赛数.

现在回来看一下 $r=1$ 时的瑞姆赛定理：把 n 个元素分成 m 个互不相交的类，那末对于任意正整数 $q_1, q_2, \cdots, q_m \geqslant 1$，只要 n 充分大，则下列 m 件事实中总有一件成立：

第一类至少有 q_1 个元素；

第二类至少有 q_2 个元素；

……

第 m 类至少有 q_m 个元素.

事实上，这就是一般形式的抽屉原则，而且由抽屉原则可知：使上述结论成立的最小数

$$N(q_1, q_2, \cdots, q_m;\ 1) = (q_1-1)+\cdots+(q_m-1)+1$$

$$=\sum_1^m q_i-(m-1).$$

由例 8 及图 4-7 还可知道

$$N(3, 3;\ 2)=6.$$

又因为 m 类中，哪一类叫第一类，哪一类叫第二类，…，都是可以任意的，因此，如果 $(q_{i_1}, \cdots, q_{i_m})$ 是 $(q_1, \cdots, q_m)$ 的一个排列，那末有

$$N(q_{i_1}, \cdots, q_{i_m};\ r)=N(q_1, \cdots, q_m;\ r).$$

对一般给定的 $q_1, \cdots, q_m \geqslant r$，瑞姆赛数——$N(q_1, \cdots, q_m;\ r)$ 到底是多少，这是一个困难的问题. 目前只有个别特殊情况能求出结果.

习 题 4·5

1. 试证明：在边长为 1 的等边三角形中

   (1) 任取 5 点，则其中必有两点，其间距离不超过 $\frac{1}{2}$；

   (2) 任取 10 点，则其中必有两点，其间距离不超过 $\frac{1}{3}$；

   (3) 任取 n^2+1 点，则其中必有两点，其间距离不超过 $\frac{1}{n}$.

2. 试证明：在边长为 1 的正方形中

   (1) 任取 n^2+1 点，则其中必有两点，其间距离不超过 $\frac{\sqrt{2}}{n}$；

   (2) 任取 $2n^2+1$ 点，则其中必有三点，由它们组成的三角形的面积不超过 $\frac{1}{2n^2}$.

3. 试证明：若任给 52 个不同的非负整数，则其中必存在两个数，它们的差或和能被 100 整除.

   [提示：如果给定 51 个格子，分别装数 0, 1, 2, …, 50，对于任意一个非负整数 n，若 $n-k$ 或 $n+k$ 能被 100 整除，则把 n 放到第 k 个($0\leqslant k\leqslant 50$)格子中去．先证明每一个非负整数一定被分配在某个格子中，而且决不会被同时分配到不同的两个格子中，然后再用抽屉原则.]

4. 设有六种药物，从中任取两种，或者能同时服用，或者不能同时服用．试证明这六种药物中要么存在三种药物，其中每两种能同时服用；要么存在三种药物，其中每两种不能同时服用.

5. 用哪一个定理可以说明下列事实：有一群人，规定其中任意 20 个人去访问 10 家军烈属之一家．只要这群人足够多，则一定存在其中 30 个人，在这 30 个人中，任意 20 个人访问的军烈属是同一家.

第四章小结

数数问题看起来很具体，不仅有具体的数法，还有很抽象

的方法．本章主要讲了：

1．数数的原则，应注意在混合使用加法和乘法原则时，防止数漏与数重，这要注意正确使用加法和乘法原则．

2．可重复与不可重复的排列组合，在实际问题中常混合使用．

3．排斥与包含原理及其推广，实际上它们是利用文氏图思考的严格化，起到防止数漏与数重的作用．

4．用数数法讨论一个具体问题的例子——各种类型的球与格子的占位问题．

5．数数的一些其它方法：递推法实际上还是归纳法；母函数法；对称法；变换法．

6．抽屉原则，它可用来证明一些存在性问题；抽屉原则的推广．

第五章

有限图引论

图是一种应用非常广的概念，在各个领域中几乎都能遇到它．在物理学中有电流图，在化工中有流程图，在通讯中有信号流向图，在生物学中有食物链图，在城市管理中有交通图、运输图、电话线路图，在体育比赛中有胜负关系图等等．图就是所有这样的种种实际概念或对象的数学抽象，概括了这些对象的共性．图论研究的对象就是与一个图有关的数量和几何关系．

粗略地说，一个图就是一些点以及这些点之间的某些联线的整体．这里的"点"和"联线"分别是某些"对象"和"对象间的某些关系"的一种数学表征（即数学模型）．在各种不同的具体场合，它们可以有完全不同的具体含义．

目前在图论中应用的术语并非完全统一．对于每一本具体的参考书，读者应注意有关术语在该书中的具体含义，不要混淆．

第一节　图的一些基本概念

定义 1　给定一些对象，把每个对象称为一个*顶点*，抽象地用一个点表示它，并用 v_1，v_2，v_3，…等分别表示一个顶点．每两个顶点之间可以联一条线或几条线，也可以不联线，以表示这两个对象之间的某种关系．这些联线中的每一条称为一条边（边可以是直线，也可以是曲线）．每个顶点也容许自己

到自己联线，这种联线是一种特殊的边，称为圈（确切地说：就是这个顶点上的一个圈，也可以有多个圈）．如果两个顶点之间有两条或更多的边，则称这两个顶点之间有**多重边**．两个顶点 v_1 与 v_2 之间的边记成 $[v_1, v_2]$，如果是多重边（r 重边），则分别用 $[v_1, v_2]_1$, $[v_1, v_2]_2$, $\cdots$, $[v_1, v_2]_r$ 表示之．显然，$[v_1, v_2]=[v_2, v_1]$．边或圈一般用 e_1, e_2, $\cdots$ 等表示之．

定义 2 一些顶点和这些顶点之间的某些边的整体称为一个*无定向的图*，简称为图[*]．只有有限个顶点的图叫做*有限图*；顶点的数目 n 叫做*图的阶*，该图就称为 *n 阶图*．没有圈也没有多重边的图叫做*简单图*；不是简单图的图叫做*多重图*．

【例 1】（公用设备管道图） 假定有 3 所房屋及 4 种公用设备，那末从房屋到公用设备的管道构成为一个图（如图 5–1）．其中房屋与公用设备都是顶点．

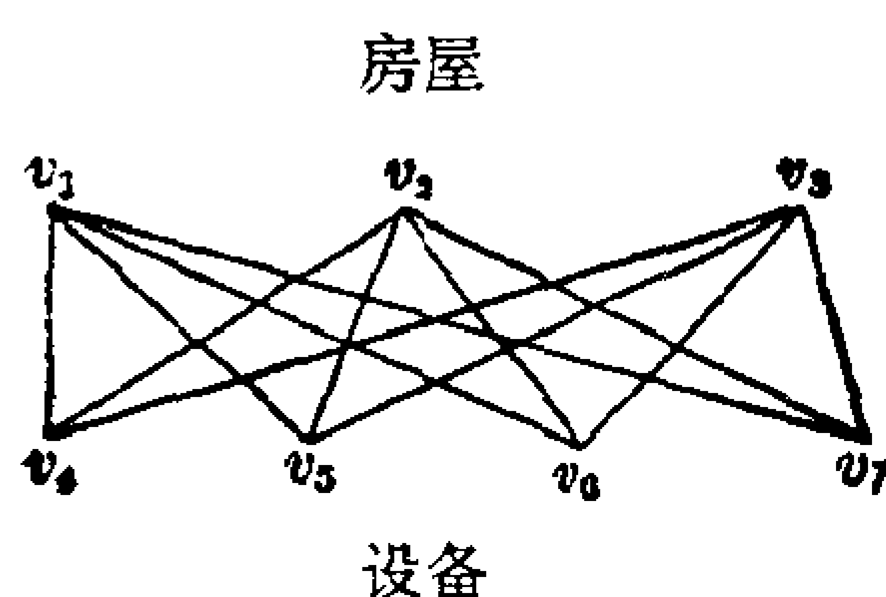


图 5–1

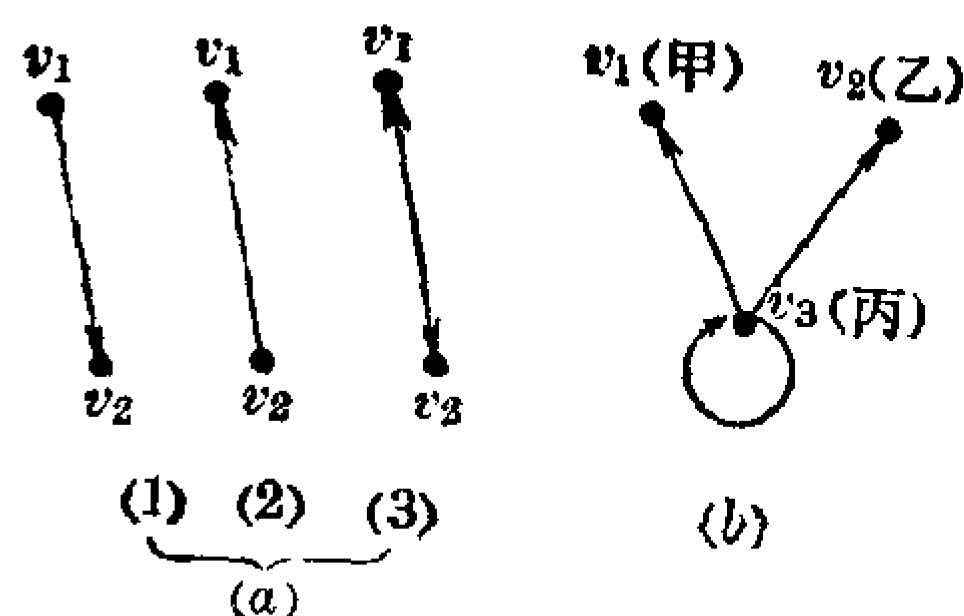


图 5–2

定义 1′ 给定了一些对象，每个对象抽象地记成一个点，称为一个*顶点*．在任给的 v_1、v_2 两个顶点之间可以联一些线或不联线，每条联线给了以下三种方向之一（用箭头 → 表示方向）后，就称为一条*定向边*．这三种可能给的方向分别为（参见图 5–2）：

(1) v_1 到 v_2 的方向：记成 $\overleftrightarrow{[v_1, v_2]}$，它是从 v_1 出发指向 v_2

---

[*] 严格地说：无定向的图只是不需要指明定向（见定义 1′, 2′）的图，并不是完全没有定向．

的定向边. 如果有好几条,还可记成$\overrightarrow{[v_1, v_2]}_1$, $\overrightarrow{[v_1, v_2]}_2$, …等.

(2) v_2 到 v_1 的方向: 记成$\overrightarrow{[v_2, v_1]}$, 它是从 v_2 出发指向 v_1 的定向边(注意: 不能记成$\overrightarrow{[v_1, v_2]}$).

(3) v_1 到 v_2 及 v_2 到 v_1 的双方向: 记成$\overleftrightarrow{[v_1, v_2]}$, 它可以看成是既从 v_1 出发指向 v_2, 又是从 v_2 出发指向 v_1 的定向边.

在(1)、(2)两种情形中出现的定向边称为*单定向边*; 在 v_1、v_2 重合时的定向边称为*定向圈*, 这时它只能有一种定向. 在情形(3)中出现的定向边称为*双定向边*(如图 5-2(*a*)).

定义 2′ 一些顶点和这些顶点之间的某些定向边的整体称为一个*定向图*.

全部定向边均为单定向边的定向图叫*单定向图*.

全部定向边均为双定向边的定向图与一般的无定向的图没有任何实质的差异. 因此, 一般的无定向的图也可以看成是一种特殊的定向图. 但是在本章中, 还是把它作为单独的图来考虑.

定义 2″ 没有多重定向边的单定向图的每条定向边或定向圈上若都附带以一个实数, 则这种定向图称为*流向图*; 每个定向边或圈上所附带的数叫做这个定向边或圈上的*流量*. 没有定向圈和多重定向边的定向图(或流向图)称为*简单的*; 非简单的定向图(或流向图)称为*多重定向图*(或*多重流向图*).

【例 2】 考虑某种产品在甲、乙、丙三个城市的产销问题, 则可把这三个城市分别看成三个顶点. 从产地到消费点画成定向边; 一个城市对自己的供应画成定向圈(如图 5-2(*b*)). 如果再把消费量附写在定向边或圈旁边, 就成为一个流向图. 因为它有圈, 所以是多重流向图.

【例 3】 在考虑化学元素之间的结合关系时，就有多重边. 例如 O_2, N_2, H_2 (见图 5-3) 中，氮与氧有三种化合物，因此就有三重边.

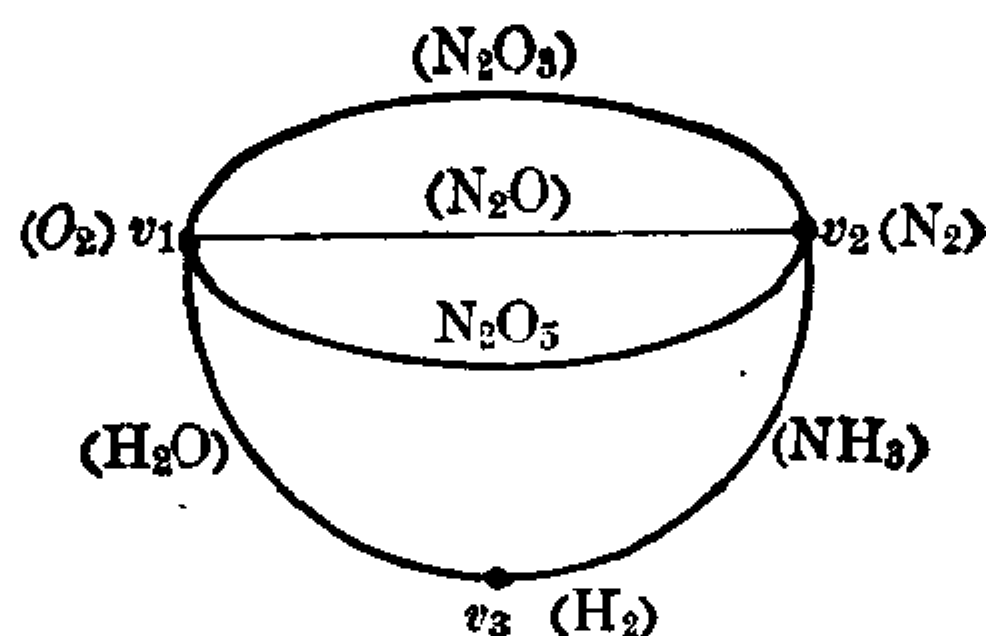


图 5-3

我们用字母 G, G_1, G_2, … 等分别表示一个图(定向图或流向图). 设它的全部顶点的集合为 V, 全部边(或定向边)的集合为 E, 那末这个图(或定向图或流向图)就可以记成

$$G=\langle V,\ E\rangle.$$

显然任意一条边(或定向边) $e(\in E)$ 必定存在 v_1, v_2 $(\in V)$, 使 $e=[v_1,\ v_2]$ (或 $\overrightarrow{[v_1,\ v_2]}$ 或 $\overrightarrow{[v_2,\ v_1]}$ 或 $\overleftrightarrow{[v_1,\ v_2]}$).

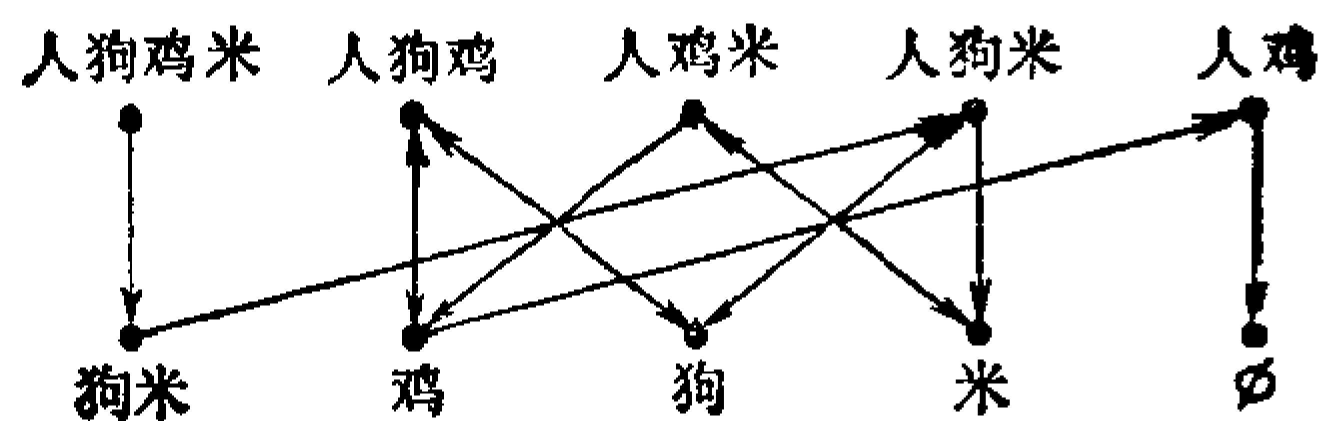
【例 4】 设有一个人带了一条狗、一只鸡及一袋米过河，在人离开时，狗要咬鸡，鸡也要吃米. 由于渡船很小，此人每次只能携带狗、鸡、米之一划船过河. 为了不受任何损失(即不发生狗咬鸡或鸡吃米的现象)，在河的一边就只能处在下列 10 种状态之一:

人狗鸡米，人狗鸡，人狗米，人鸡米，人鸡，

狗米，狗，鸡，米，空($\emptyset$).

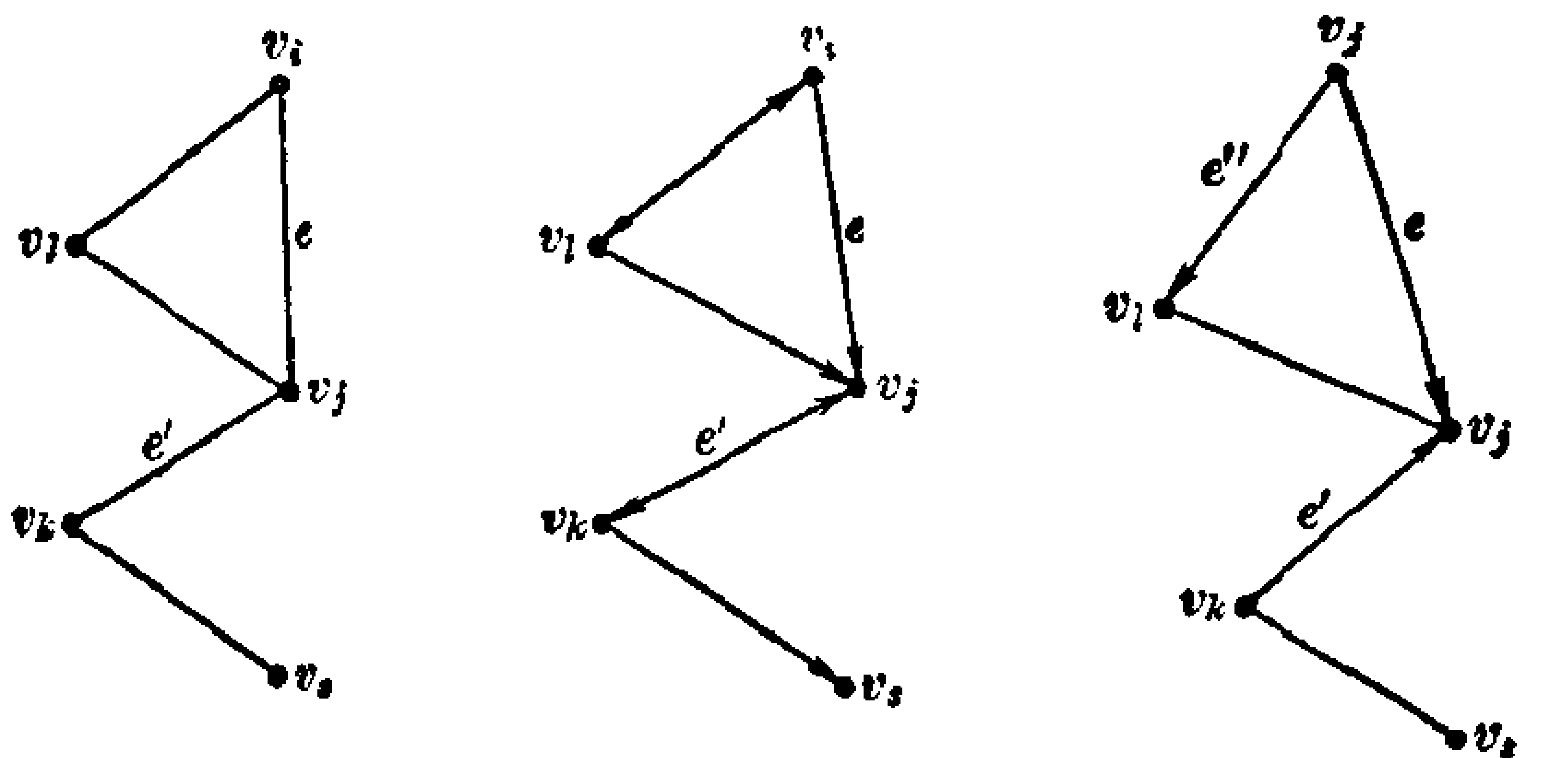
如果把这 10 个状态看成 10 个顶点，若从状态 v_1 能通过摆渡一次而达到状态 v_2, 那末就从 v_1 引一条定向边 $\overrightarrow{[v_1,\ v_2]}$ 至 v_2, 由此就得到一个关于摆渡的定向图(图 5-4).

定义 3 一个图 G 中的两条边 e 与 e' 称为邻接的，如果 $e=[v_i,\ v_j]$, $e'=[v_j,\ v_k]$; 在定向图或流向图中，两条边 e 与 e' 称为定向邻接的，如果 $e=\overrightarrow{[v_i,\ v_j]}$ 或 $e=\overleftrightarrow{[v_i,\ v_j]}$, $e'=\overrightarrow{[v_j,\ v_k]}$ 或 $e'=\overleftrightarrow{[v_j,\ v_k]}$; 称为半邻接的，如果 $e=\overrightarrow{[v_i,\ v_j]}$, $e'=\overrightarrow{[v_k,\ v_j]}$ (见图 5-5).



(江这一边的状态)

图 5-4



(e, e' 邻接)　　(e, e' 定向邻接)　　(e, e' 定向半邻接)

图 5-5

定义 4 一个图 G 中给定了两个顶点 v、v'，如果存在 l 条边 $e_1, \cdots, e_l$，使

$$e_1=[v,\ v_1],\ e_2=[v_1,\ v_2],\ \cdots,\ e_l=[v_{l-1},\ v'],$$

则称 $e_1, \cdots, e_l$ 为从 v 到 v'（或从 v' 到 v）的一条长度为 l 的道路，记成 $[e_1, e_2, \cdots, e_l]$. 在定向图 G 中给定了两个顶点 v, v', 如果存在 l 条边 $e_1, \cdots, e_l$, 使 $e_1=\overrightarrow{[v,\ v_1]}$（或 $\overleftrightarrow{[v,\ v_1]}$），$e_2=\overrightarrow{[v_1,\ v_2]}$（或 $\overleftrightarrow{[v_1,\ v_2]}$），$\cdots$，$e_l=\overrightarrow{[v_{l-1},\ v']}$（或 $\overleftrightarrow{[v_{l-1},\ v']}$），则称 $e_1, \cdots, e_l$ 为从 v 到 v' 的一条长度为 l 的定向道路，也记成 $[e_1, e_2, \cdots, e_l]$；如果允许其中至少某个 $e_i=\overrightarrow{[v_i,\ v_{i-1}]}$，则称 $e_1, \cdots, e_l$ 为从 v 到 v' 的一条长度为 l 的半道路*)，也记成 $[e_1, \cdots, e_l]$. v 和 v' 分别称为起点和终点. 起点和终点重合的道路（相应地：定向道路、半道路）称为闭路（相应地：定向

*) 半道路在有些书上称为链；定向边在有的书上称为弧.

闭路、闭半道路).

显然从 v 到 v' 的半道路也必然是一条从 v' 到 v 的半道路. 但是从 v 到 v' 的一条定向道路一般并不一定是从 v' 到 v 的定向道路.

定义5 如果道路(相应地:定向道路、半道路)$[e_1, \cdots, e_l]$ 中没有一条边(相应地:定向边)重复(双向边在相反方向各出一次不算重复)出现,则称为*简单的道路*(相应地:简单的定向道路,简单的半道路)*). 简单闭路(相应地:简单定向闭路、简单闭半道路)简称为*环路*(相应地:*定向环路*、*环形半道路*),(特别地,象 $\overleftrightarrow{v_1\ \ v_2}$ 也算定向环路).

定义6 如果道路(相应地:定向道路、半道路)$[e_1, \cdots, e_l]$ 上除 e_i 与 e_{i+1} $(i=1, \cdots, l-1)$ 邻接(定向邻接、半邻接)及 e_l 与 e_1 可以允许邻接(或定向邻接、半邻接)外,不再存在其它邻接(或定向邻接、半邻接)的边(或定向边),则称它为*初等的*(直观地看:不打结).

定义7 如果存在一条通过图(或定向图)G 的所有顶点的道路(相应地:定向道路、半道路),则称该道路(相应地:定向道路、半道路)为*完全的*.

【例4′】 在例4中,有没有能保证鸡与米都安全且最简单的过河办法?有多少种不同方式?

解: 这就是在图5-4的定向图中寻找从顶点 人狗鸡米 到顶点 $\emptyset$ 的初等定向道路问题. 每种安全且简单的过河办法就对应于上述的一条初等定向道路. 而这种初等定向道路必是下列两条之一:它们中的每一条对应于河这边的状态变化如图5-6所示:

*) 有简单道路的图未必是简单图.

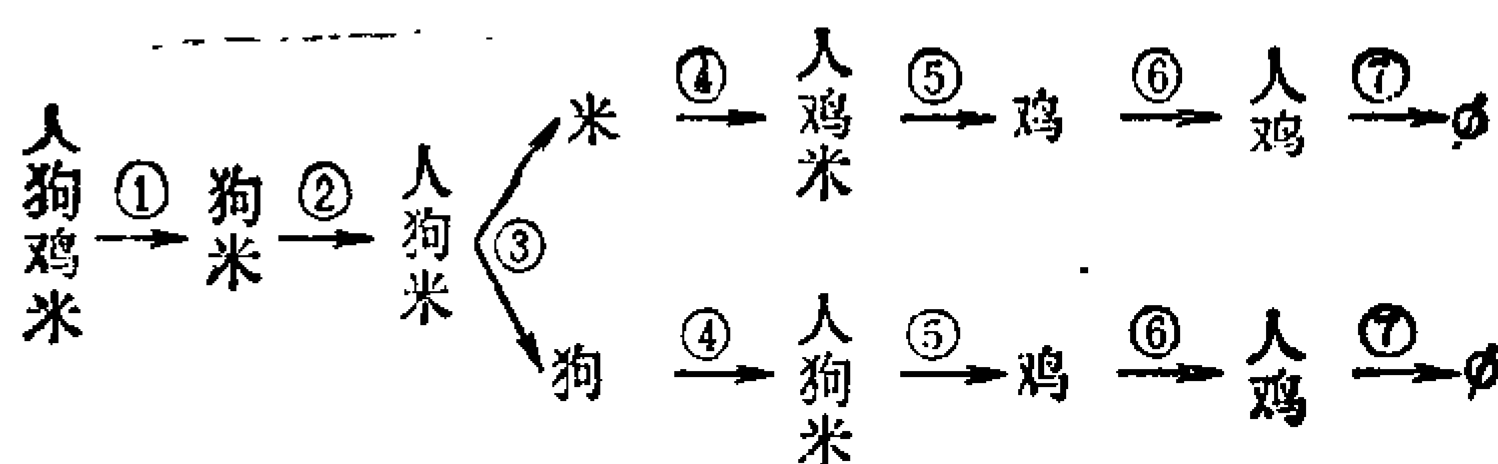


图 5-6

其中 ① 表示人与鸡过河；② 表示人回来；③ 表示人与狗或人与米过河；④ 表示人与鸡回来；⑤ 表示人与米或人与狗过河；⑥ 表示人回来；⑦ 表示人与鸡过河．一共两种简单而安全的过河办法．每种都需要来回共摆渡七次．

本例和下面的例 5 都是用图来帮助思考的例子．

引理 1 如果定向图 $G=\langle V, E\rangle$ 存在一条过顶点 v 的闭半道路，那末它必存在一条过 v 的初等环形半道路，而且后者是原来的闭半道路的一部分．

【证】 第一步，证明存在一条过 v 的环形半道路是原来的闭道路(记成 L)的一部分：

如果 L 已是简单半道路，那末按定义它就是环形半道路．如果它不是简单的，那末至少有一条定向边在 L 中重复两次．设这个定向边的两个端点为 v_1 及 v_2．从 v 出发沿 L 走．不妨设第一次先到达 v_1，在 L 中，除去第一次到 v_1 及最后一次到 v_1 之间的一段后，得到的仍是一个闭半道路，它经过 v 且是 L 的一部分，记为 L_1．如果 L_1 已是简单的，那末它就是环形半道路．如果它还不是简单的，那末就用它代替 L，重复前面的步骤，就可以得到一条过 v 且是 L_1 的一部分(从而也是 L 的一部分)的闭半道路，记为 L_2．显然，L_1 比 L 短，L_2 比 L_1 短，……．如此重复，经过有限次后(因为 L 的长度有限)，最后总能得到一条过 v 的简单闭半道路，记成 L_s，它是 L 的一部分，按定义它就是过 v 的环形半道路．

第二步，证明存在一条过 v 的初等环形半道路，它是 L 的一部分：

如果 L_s 已是初等的半道路，那末它就满足要求了．如果 L_s 不是初等半道路，那末 L_s 上必有一个顶点(不妨设为 v^*)，它至少是 L_s 上某 4 条定向边的端点．从 v 出发沿 L_s 走，在 L_s 上除去第一次到达 v^* 与最后一次到达 v^* 之间的一段后，得到的仍是一条过 v 的环形半道路，它是 L_s 的一部分(因而也是 L_s 的一部分)，记为 $L^{(1)}$．如果 $L^{(1)}$ 已是初等的，那末它就满足要求了．如果 $L^{(1)}$ 不是初等的，则用 $L^{(2)}$ 代替 L_s 后重复上面的步骤，就可以得到一条过 v 的环形半道路，它是 $L^{(1)}$ 的一部分（因而仍是 L 的一部分），记成 $L^{(2)}$，显然，$L^{(2)}$ 比 $L^{(1)}$ 短，而 $L^{(1)}$ 又比 L_s 短，……，如此重复，经过有限次后，总能得到一条过 v 且又是 L 的一部分的初等环形半道路．】

定义 8 对于图 G 的两个顶点 v, v'，如果存在一条以 v 为起点，以 v' 为终点的道路，则称由 v **可达** v'，记成 $v\leftrightarrow v'$(显然由 $v\leftrightarrow v'$ 可得 $v'\leftrightarrow v$；由 $v_1\leftrightarrow v_2$，$v_2\leftrightarrow v_3$ 可得 $v_1\leftrightarrow v_3$)．

定义 8′ 对于定向图 G 的两个顶点 v 与 v'，如果存在一条以 v 为起点，以 v' 为终点的定向道路，则称由 v **可达** v'，记成 $v\rightarrow v'$；如果存在一条以 v 为起点，以 v' 为终点的半道路，则称由 v **能连结** v'，记成 $v\sim v'$（显然，由 $v\rightarrow v'$ 并不能得到 $v'\rightarrow v$，但是由 $v_1\rightarrow v_2$，$v_2\rightarrow v_3$ 可得 $v_1\rightarrow v_3$)．

定义 9 设有定向图 $G=\langle V, E\rangle$，$\forall u$、$v\in V$，若 $u\rightarrow v$，且 $v\rightarrow u$，则称 G 为**强连通的**；若 $u\rightarrow v$ 或 $v\rightarrow u$，则称 G 为**单向连通的**；若 $u\sim v$，则称 G 为**弱连通的**；若 G 不是弱连通的，则称 G 为**不连通的**．

显然，强连通必然单向连通，单向连通必然弱连通．

定义 9′ 若多重图 $G=\langle V, E\rangle$ 对任意的 u、$v\in V$，均有

$u \leftrightarrow v$，则称 G 为连通的；否则，就称 G 为不连通的。

定理 1 对定向图 $G=\langle V, E\rangle$，有

(1) G 强连通 $\Leftrightarrow$ G 中存在一条完全定向闭路；

(2) G 单向连通 $\Leftrightarrow$ G 中存在一条完全定向道路；

(3) G 弱连通 $\Leftrightarrow$ G 中存在一条完全半道路.

【证】 (1) 先证 $\Leftarrow$：若 G 中存在一条完全定向闭路，那末对 $\forall u$、$v\in V$，u、v 均在此定向闭路上，因此 $u\to v$，而且 $v\to u$，因而 G 是强连通的.

现证"$\Rightarrow$"：设 $V=\{v_1, \cdots, v_n\}$，由于强连通，所以有

$$v_1\to v_i,\ v_i\to v_1 \quad (i=2, 3, \cdots, n),$$

把以上定向道路接起来．从 v_1 到 v_2 再回到 v_1，然后从 v_1 到 v_3 再回到 v_1，…，最后从 v_1 到 v_n 再回到 v_1．这就得到一条完全定向闭路.

(2) 先证"$\Leftarrow$"：若 G 中存在一条完全定向道路，那末对 $\forall u$、$v\in V$，u、v 均在这条道路上，因而要么 $u\to v$，要么 $v\to u$，即 G 是单向连通的.

现证"$\Rightarrow$"，首先要证明一个事实：如果 G 为单向连通的，那末对 V 的任意一个子集 A，一定存在 $v^*\in A$，使对任何其它的 $v\in A$，均有

$$v^*\to v. \tag{F}$$

这一事实可以用数学归纳法证明：对 A 的元素个数应用归纳法：若 $n(A)=2$，设 $A=\{v_1, v_2\}$，则由 G 的单向连通性可知：$v_1\to v_2$ 或 $v_1\to v_2$ 总有一个成立，不妨设 $v_1\to v_2$ 成立，那末可取 $v^*=v_1$．设：$n(A)=k$ 时，v^* 存在．在 $n(A)=k+1$ 时，设 $A=\{v_1, \cdots, v_{k+1}\}$．由于 $n(\{v_1, \cdots, v_k\})=k$，所以由归纳法假设可知：存在 $v^*\in\{v_1, \cdots, v_k\}$（不妨设 $v^*=v_1$），使 $v^*\to v_2$，…，$v^*\to v_k$（即 $v_1\to v_2$，…，$v_1\to v_k$）．现在对 A 选择

$$v^*=\begin{cases}v_1 & (若\ v_1\to v_{k+1}),\\ v_{k+1} & (若\ v_{k+1}\to v_1).\end{cases}$$

那末 v^* 就满足要求了. 因此由数学归纳法原理可知事实(F)成立.

现在利用事实(F)证明 ⇒, 由事实(F), 取 $A=V$, V 存在一个 $v_1\in V$, 它可以达到 V 中一切其它顶点. 再取 $A=V-\{v_1\}$, 由事实(F), 存在 $v_2\in V-\{v_1\}$, 它可以达到 $V-\{v_1\}$ 中一切其它点. 然后取 $A=V-\{v_1, v_2\}$, … 依此下去, 由 $n(V)=n<\infty$, 经有限步就可以选得一串 $v_1, v_2, \cdots, v_n$, 使 $v_1\to v_2, v_2\to v_3, \cdots, v_{n-1}\to v_n$, 且 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. 于是把 v_1 到 v_2 的道路, v_2 到 v_3 的道路, …, v_{n-1} 到 v_n 的道路接起来, 就得到 G 的一条完全定向道路.

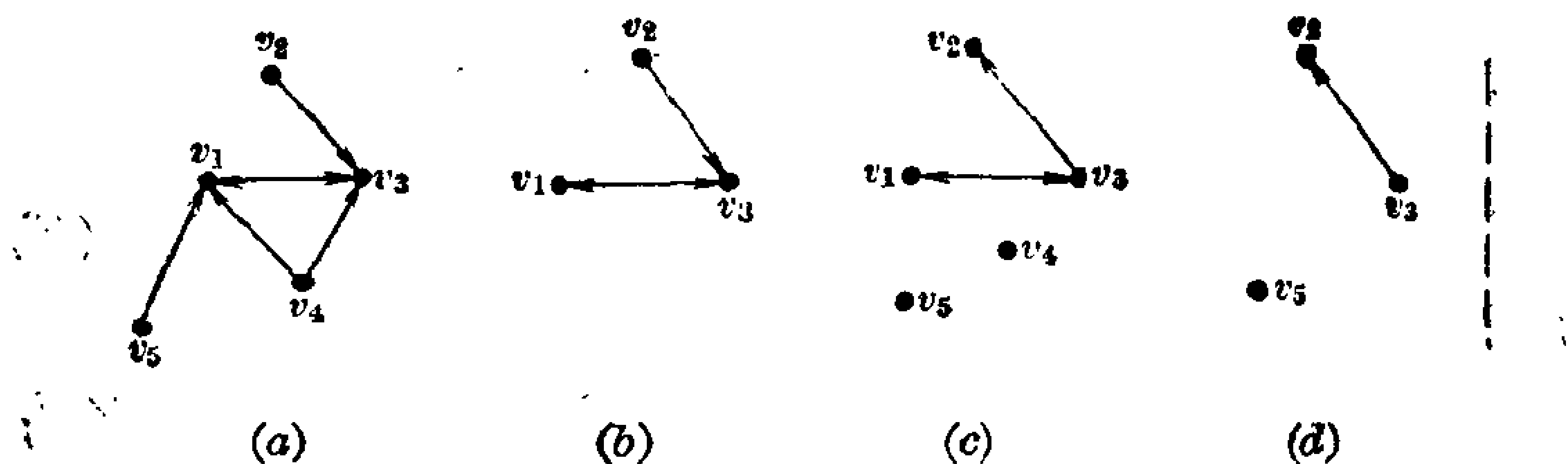
(3)的证明完全类似于(1)的证明. 留给读者仿证. ▌

定义 10 对于图(或定向图、流向图) $G=\langle V, E\rangle$ 而言, (1)给定顶点集 V 的某个子集 V_1, 令 $E_1=E$ 中端点都在 V_1 内的全体边(或定向边), 则称 $\langle V_1, E_1\rangle$ 为顶点集 V_1 在 G 内生成的子图(或定向子图, 流向子图)若 $V_1\neq V$, 则称 $\langle V_1, E_1\rangle$ 为真子图. (2)给定边(或定向边)集合 E 的某个子集 E', 则称 $\langle V, E'\rangle$ 为 G 的部分图(或定向部分图、流向部分图.)若 $E'\neq E$, 则称 $\langle V, E'\rangle$ 为真部分图. (3) G 的部分图的一个子图称为 G 的部分子图. 若这图不全与 G 相同, 则称真部分子图.

【例 5】 在图 5-7 中

$$V_1=\{v_1, v_2, v_3\},\ E_1=E'=\{e_1, e_2\}.$$

从图形上看, 子图是从原来的图去掉一些顶点和以这些顶点为端点的边后得到的图. 部分图是从原来的图去掉一些边后得到的图. 部分子图是从原图先去掉一些边, 然后再去掉一



(a) $G=\langle V, E\rangle$; (b) 定向子图$\langle V_1, E_1\rangle$; (c) 定向部分图 $\langle V, E'\rangle$; (d) 定向部分子图

图 5-7

些顶点和以这些顶点为端点的边后得到的图. 要注意: 顶点可以脱离边而单独存在. 但边不能脱离顶点而单独存在.

用实例来说, 如果 G 是我国的公路交通图, G 的顶点为我国人口十万以上的城镇, 那末例如河北省内的公路交通图就是 G 的一个子图; 我国的沥青公路的交通图就是 G 的一个部分图; 河北省内的沥青公路交通图就是 G 的一个部分子图.

定理 2 对于定向图(或对应地: 图)$G=\langle V, E\rangle$, 一定存在有限个图 $G_1=\langle V_1, E_1\rangle$, …, $G_l=\langle V_l, E_l\rangle$, 使:

(1) $V=V_1\cup\cdots\cup V_l$, $V_i\cap V_j=\emptyset$,

$E=E_1\cup\cdots\cup E_l$, $E_i\cap E_j=\emptyset$;

(2) G_1, …, G_l 都分别是弱连通的(或相应地: 连通的), 称为 G 的弱连通(或相应地: 连通)分量.

【证】 首先对于集合 V 内的元素, 定义一种等价关系 $\boldsymbol{R}$: $\forall v$、$u\in V$, 令

$v\boldsymbol{R}u$ 当且仅当 $v=u$ 或 $v\neq u$ 而且 $v\sim u$.

这个关系 $\boldsymbol{R}$ 确实是一种等价关系, 因为显然有

$$v\boldsymbol{R}v$$

$$v\boldsymbol{R}u\Rightarrow u\boldsymbol{R}v$$

$$vRu,\ uRw \Rightarrow vRw,$$

于是 V 按这个等价关系可分成有限个等价类 $V_1, \cdots, V_l$, 而且 V 中两个不同的顶点 u、v 属于同一个等价类当且仅当 u 到 v 有一条半道路.

设 $V_1, \cdots, V_l$ 生成的 G 的子图分别为 $G_1=\langle V_1, E_1\rangle, \cdots, G_l=\langle V_l, E_l\rangle$, 那末它们都分别是弱连通的. 这是因为例如对任意的 $u, v\in V_1$, 有 $u\boldsymbol{R}v$. 因此存在一条 u 到 v 的半道路. 按 $\boldsymbol{R}$ 关系的定义,这条半道路上所有的顶点都与 u $\boldsymbol{R}$-等价, 因而它们都在 V_1 中. 于是按子图的定义, 这条半道路上的所有定向边都在 E_1 中. 这说明 $G_1=\langle V_1, E_1\rangle$ 是弱连通的. 另外因为 $\langle V_i, E_i\rangle$ $(i=1, \cdots, l)$ 都是 G 的不同的子图, 且 $V_1, \cdots, V_l$ 两两不交, 所以 $E_1, \cdots, E_l$ 两两不交. 最后, 对于任意的 $e\in E$, 由于 e 的两个端点的 $\boldsymbol{R}$-等价性, 它们应属于同一个 V_i, 因而 $e\in E_i$. 也就是有

$$E=E_1\cup\cdots\cup E_l.$$

综合起来,就得到定理 2. ▌

注 对强连通性或单向连通性而言, 定理 2 的事实不成立. 只能得到:

存在有限个 G 的强连通的定向子图

$$G_1=\langle V_1, E_1\rangle, \cdots, G_l=\langle V_l, E_l\rangle,$$

使

$$V=V_1\cup\cdots\cup V_l,\ V_i\cap V_j=\emptyset\ \ (i\neq j),$$
$$E\supset E_1\cup\cdots\cup E_l,\ E_i\cap E_j=\emptyset\ \ (i\neq j).$$

也就是: 存在 G 的一个定向部分图 $\tilde{G}=\langle V, \tilde{E}\rangle$ 及 G 的有限个定向子图 $G_1, \cdots, G_l$, 使

(1) $V=V_1\cup\cdots\cup V_l,\ V_i\cap V_j=\emptyset,$
$\tilde{E}=E_1\cup\cdots\cup E_l,\ E_i\cap E_j=\emptyset.$

(2) $G_1, \cdots, G_l$ 都分别是强连通的.

(3) 不存在 G 的强连通的定向子图以 $G_1, \cdots, G_l$ 的任一个为后者

的真定向子图.

对单方连通性,即使类似于上述结论,也不成立.

【例6】 在图5-8中的定向图有五个弱连通分量(定向边画成直线或曲线没有实际差别).

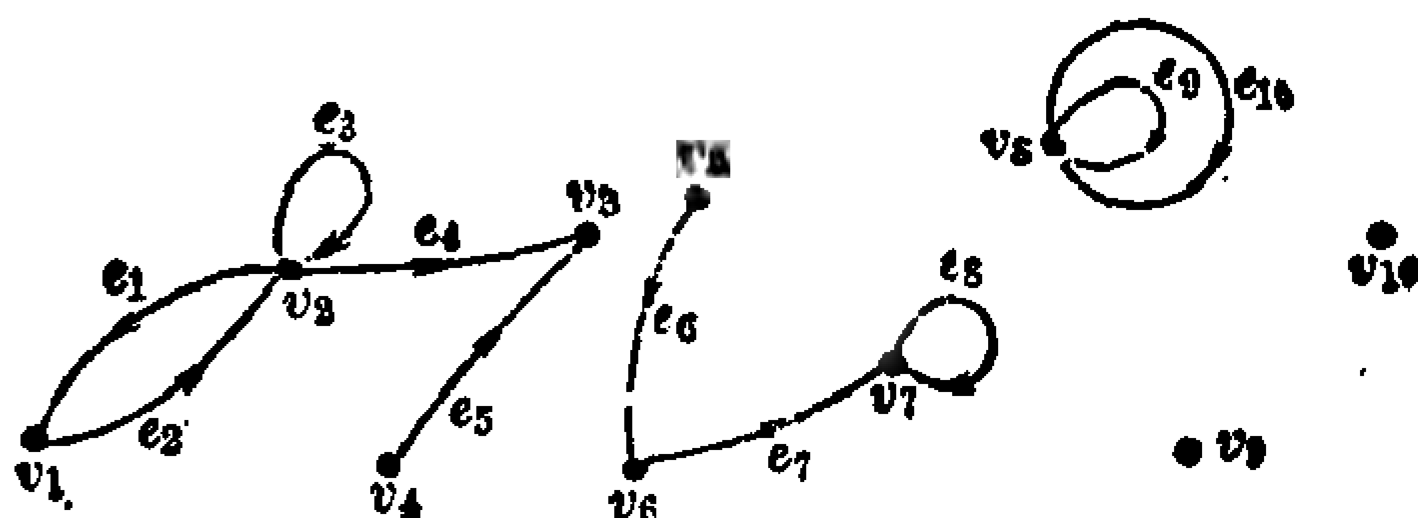


图 5-8

定义11 定向图 $G=\langle V, E\rangle$ 的某个顶点 v 的流出结合度是指从 v 出发的定向边的数目,记成 $d^+(v)$; 流入结合度是指到达 v 的定向边的数目,记成 $d^-(v)$ (在计算边数时,以 v 为端点的每条双定向边应既在到达 v 的定向边数中算一次, 又在从 v 出发的定向边数中再算一次). v 的结合度数是指 $d^+(v)+d^-(v)$, 记成 $d(v)$.

例如在例5中 $d_+(v_8)=2$; $d_-(v_8)=2$; $d(v_8)=4$.

定义11′ 图 $G=\langle V, E\rangle$ 的某个顶点 v 的结合度是指以 v 为端点的边的数目,记成 $d(v)$.

定义12 没有环形半道路(因而不能有双定向边)的弱连通定向图称为树; 没有环形半道路的定向图称为林. 在树中结合度为1的顶点叫梢点; 以梢点为端点的定向边叫做梢边. 如果在树中存在一个顶点,它能到达所有其它顶点(即从这点到任何其它顶点都有一条定向道路),则称这个顶点为树的根,一般说来树并不见得都有根(见图5-9), 有根的树叫做定向树.

引理2 如果一个定向图的所有顶点的结合度都大于1,

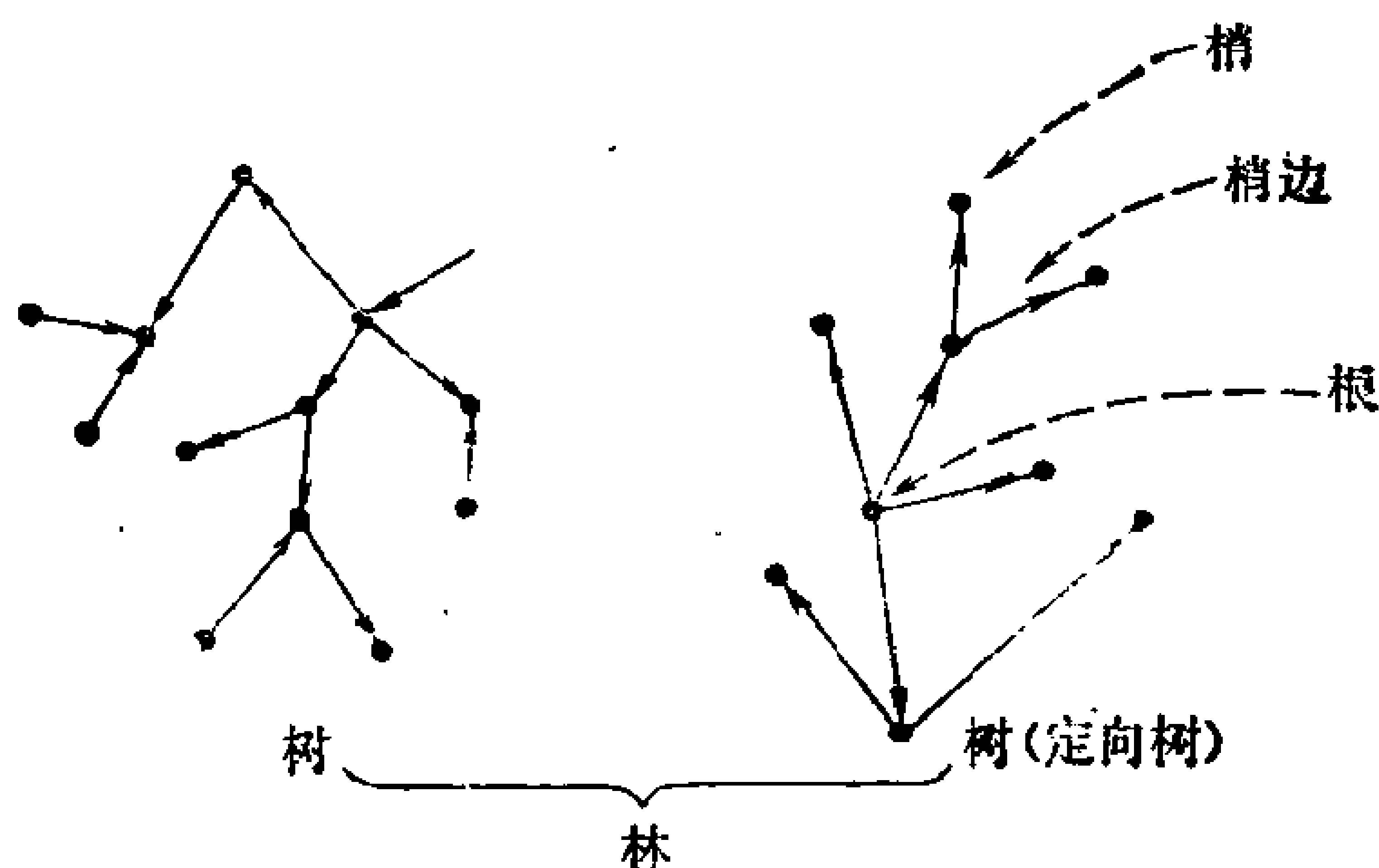


图 5-9

则在这定向图中必有初等环形半道路.

【证】 任取一个顶点,由于它的结合度大于1,所以必有两条以它为端点的定向边. 由于这两条定向边的另一端点的结合度分别大于1,就必然还有其它定向边以这些点为端点,同样,必然还有从这些边另一端出发的其它定向边,……,由于总顶点数是有限的,最后总能得到一条闭半道路. 再由引理1,即可知初等环形半道路存在. 】

由引理2可以推出树必有梢点.

定理3 对于一个阶数 m 大于2的定向图 $G=\langle V, E\rangle$,下列各种说法彼此都是等价的(也就是说:从下列(2)至(6)的每一种叙述都是树的充分必要条件):

(1) G 弱连通且没有环形半道路(即 G 是树);

(2) $n(E)=m-1$ 且 G 没有环形半道路;

(3) G 弱连通, $n(E)=m-1$;

(4) G 没有环形半道路,但如果保持 G 的顶点不变而在 G 中任意添加一条定向边,则得到的新的定向图就恰有一条环形半道路;

(5) G 弱连通但没有弱连通的真定向部分图;

(6) 在 G 中任意两个顶点之间有且只有一条半道路.

(注 根据引理 1, 在本定理的 (1), (2), (4) 中的叙述都可以改成"初等环形半道路".)

【证】 1° (1)⇒(2) 的证明: 已知 G 为弱连通无环形半道路, 因此由引理 2 可知: G 至少有一个结合度为 1 的顶点. 从 G 中去掉这个顶点及以它为端点的定向边后, 得到 G 的一个定向部分子图 G_1. G_1 仍是弱连通的. 这是因为由 G 的弱连通性在 G_1 的任意两个顶点之间必有一条 G 的半道路. 又由于这条半道路不能以结合度为 1 的点为非端点, 所以这条半道路必然全在 G_1 内, 这就是 G_1 的弱连通性. 当然 G_1 也没有环形半道路. 因此 G_1 也至少有一个结合度为 1 的顶点, 用 G_1 代替 G, 重复上面的步骤, 可知存在一个 G_1 的定向部分子图 G_2, 它只比 G_1 少一个顶点及一条定向边, 而且 G_2 仍弱连通无环形半道路, ……如此重复, 就得到一串:

$$G=\langle V,\ E\rangle,\ G_1=\langle V_1,\ E_1\rangle,\ G_2=\langle V_2,\ E_2\rangle,\ \cdots,$$

其中每一个比前面的一个少一条定向边及一个顶点. 所以

$$n(V)-n(E)=n(V_1)-n(E_1)=n(V_2)-n(E_2)=\cdots.$$

因为 $n(V)=m$, 所以如果 $n(E)\geqslant m$, 那末上面的手续一直可以进行 $m-2$ 次, 得到的 G_{m-2} 有

$$n(V_{m-2})=m-(m-2)=2,$$

再由 G_{m-2} 的弱连通及无环形半道路的特性, 可知必有

$$n(E_{m-2})=1.$$

这就导致矛盾的式子:

$$0\geqslant n(V)-n(E)=n(V_{m-2})-n(E_{m-2})=2-1>0.$$

这说明 $n(E)\geqslant m$ 不可能. 因此 $n(E)<m$. 不妨设 $n(E)=l$, 那末上面所说的手续进行 $l-1$ 次后, 得到的 G_{l-1} 有

$$n(E_{l-1})=l-(l-1)=1.$$

由 G_{l-1} 的弱连通性及无环形半道路性质可知：必有 $n(V_{l-1})=2$. 于是由(5,1)

$$n(V)-n(E)=n(V_{l-1})-n(E_{l-1})=2-1=1,$$

立刻可得到

$$n(E)=n(V)-1=m-1.$$

所以(2)成立.

2° (2)⇒(3)的证明：已知 $n(E)=m-1$ 且 G 没有环形半道路，要证明 G 为弱连通的. 用反证法：设 G 为不弱连通，那末由定理 2 可知：G 可以分成 l 个弱连通分量，并且 $l\neq 1$. 这些弱连通分量

$$G_1=\langle V_1, E_1\rangle,\ G_2=\langle V_2, E_2\rangle,\ \cdots,\ G_l=\langle V_l, E_l\rangle$$

都分别满足(1)的条件，因此由 1° 可知

$$n(E_i)=n(V_i)-1 \quad (i=1, \cdots, l).$$

从而由定理 2 得到

$$n(E)=\sum_{i=1}^{l} n(E_i)=\sum_{i=1}^{l} n(V_i)-l=n(V)-l=m-l>m-1$$

$$(\text{因为 } l>1).$$

这就导致与假设 $n(E)=m-1$ 矛盾. 因此 G 不弱连通是不对的. 这就证明了(3)成立.

3° (3)⇒(4)的证明：设 $n(E)=m-1$, G 弱连通. 先证 G 没有环形半道路. 仍用反证法. 设 G 有环形半道路. 那末由于 G 的弱连通性可知：去掉 G 在环形半道路上的某一条定向边(但不去掉任何顶点)后得到 G 的一个定向部分图 G_1 仍是弱连通的. 如果它还有环形半道路，那末用 G_1 代替 G 重复上面的步骤，可以得到一个弱连通的 G_2，它只比 G_1 少一条边，……如此重复，最后总会到达一个弱连通的 G_l，它不再有环形半道路，而且只比 G 少 l 条边($l\geqslant 1$). 设 $G_l=\langle V_l, E_l\rangle$，于

是 $n(V_l)=n(V)=m,\ n(E_l)=n(E)-l$. 但是 G_l 满足(1)的条件，由 1° 可知：$n(E_l)=n(V_l)-1=m-1$. 因此

$$n(E)=m(E_l)+l=(m-1)+l\geqslant m \quad (l\geqslant 1).$$

这就与假设 $n(E)=m-1$ 矛盾. 所以 G 有环形半道路不能成立. 这就证明了 G 没有环形半道路. 下面证明在 G 中任意加进一条新的定向边(但是保持原来的顶点不变)后，得到的某个定向图 G' 恰有一个环形半道路. 这是因为 G' 有两个以上环形半道路是不可能的，否则，就会推出 G 有环形半道路. 这与上面已证明的事实相矛盾. 另一方面，G' 没有环形半道路也是不可能的. 否则，G'(设 $G'=\langle V,\ E'\rangle$) 就满足(1)，从而由 1° 可得 $n(E')=m-1$，于是

$$n(E)=n(E')-1=m-2.$$

这也导致与假设矛盾. 因此(4)成立.

4° (4)⇒(5)的证明：设 G 没有环形半道路，且在不改变 G 的顶点的情况下，对 G 加进一条定向边后得到的 G' 就恰有一条环形半道路. 现在先证 G 必为弱连通. 如果相反，那末由定理 2，G 至少有 2 个弱连通分量. 在这两个弱连通分量中，各取一个顶点，对这两个点中间加进一条定向边，由于这两个点属于不同的弱连通分量，所以这条定向边决不会是 G 的定向边，而且在 G 加进这条新的定向边后，得到的定向图 G' 仍不能有环形半道路. 这就与假设相矛盾. 因此 G 是弱连通的. 现在进一步证明 G 没有弱连通的真定向部分图. 假设相反：G 有一个弱连通的真定向部分图 G_1，那末 G_1 的定向边的数目至少要比 G 的定向边数少 1. 不妨设它们的定向边数恰好相差一条[因为如果差 l 条($l>1$)，则可把其中 $l-1$ 条添进 G_1 中去得到一个 G_2，它仍是弱连通的并且是 G 的真定向部分图). 设这条边(记为 e)的端点为 v_1 及 v_2. 由

G_1 的弱连通性可知：在 G_1 中存在一条由 v_1 到 v_2 的半道路。这样若再把这条边 e 加到 G_1 就得到了一条闭半道路，并且也就得到 G. 于是 G 就有一条闭半道路，根据引理 1，G 就有一条环形半道路，这导致与假设矛盾. 因此(5)成立.

5° (5)⇒(6)的证明：设 G 为弱连通，但没有弱连通的真定向部分图. 于是 G 中任意两顶点 v_1 与 v_2 之间必存在唯一的一条半道路. 因若相反，则在 v_1 与 v_2 之间至少有两条半道路，那就是在 G 中有一个通过 v_1 与 v_2 的闭半道路. 在这闭半道路上去掉一条定向边后，不会影响弱连通性. 这就得到了 G 的一个弱连通的真定向部分图. 这导致与假设相矛盾. 因而(6)成立.

6° (6)⇒(1)的证明：设 G 中任意两个顶点之间存在且只存在一条半道路，那末显然 G 是弱连通的. 并且 G 不能有环形半道路. 因若相反，G 存在一条环形半道路. 那末这环形半道路上至少有两个顶点 v_1 与 v_2，而且这两个顶点之间有两条不同的半道路，从而导致与假设相矛盾. 因此 (1) 成立. ▌

定义 13 若弱连通定向图 $G=\langle V, E\rangle$ 的定向部分图 $G_0=\langle V, E_0\rangle$ ($E_0\subset E$)是树，则称 G_0 为 G 的生成树. 由 E、E_0 及这些边的端点组成的图叫做 G 关于 G_0 的余树.

定理 4 弱连通定向图必有生成树.

【证】 若 G 就是树，则它就是自己的生成树；如果 G 不是树，则它必有环形半道路. 在其中的一个环形半道路上去掉一条定向边后，得到 G 的一个定向部分图 G_1 仍是弱连通的. 如果 G_1 是树，则它就是 G 的生成树；如果 G_1 不是树，则可用 G_1 代替 G，重复上面的步骤，就能得到 G_1 的一个弱连通定向部分图 G_2. 它仍是 G 的定向部分图，如果它是树，则

就是 G 的生成树，否则，再重复上述的步骤，……由于 G 的定向边总数是有限的，所以经过有限次后，就能得到 G 的一个定向部分图 G_l，它是弱连通的，但 G_l 的任何一个真定向部分图就不再弱连通了．因此 G_l 满足定理 3 中的条件(5)．由定理 3 可知，其中(5)与(1)是等价的，因而 G_l 是树．它就是 G 的生成树．▌

习 题 5·1

1．若 v_1、v_2 是定向图 $G=\langle V, E\rangle$ 的两个顶点，设存在 v_1 到 v_2 的半道路．证明必有 v_1 到 v_2 的简单且初等半道路．

2．若 $G=\langle V, E\rangle$ 是弱连通的 n 阶定向图．则对任意的 v_1、$v_2\in V$，必存在一条 v_1 到 v_2 且长度不超过 $n-1$ 的半道路．

3．两个顶点、三个顶点、四个顶点、五个顶点、六个顶点的无向树各有多少种？试画出来．

4．试画出 11 种不同类型的 7 个顶点的树．又问还有没有其它类型的 7 个顶点的树？

5．证明一个树至少有两个梢点．

6．设简单图

$$G=\langle V, E\rangle,\ n(V)=m,\ n(E)>\frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

证明 G 是连通的．又问若

$$n(E)=\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

时，结论是否也一定成立？

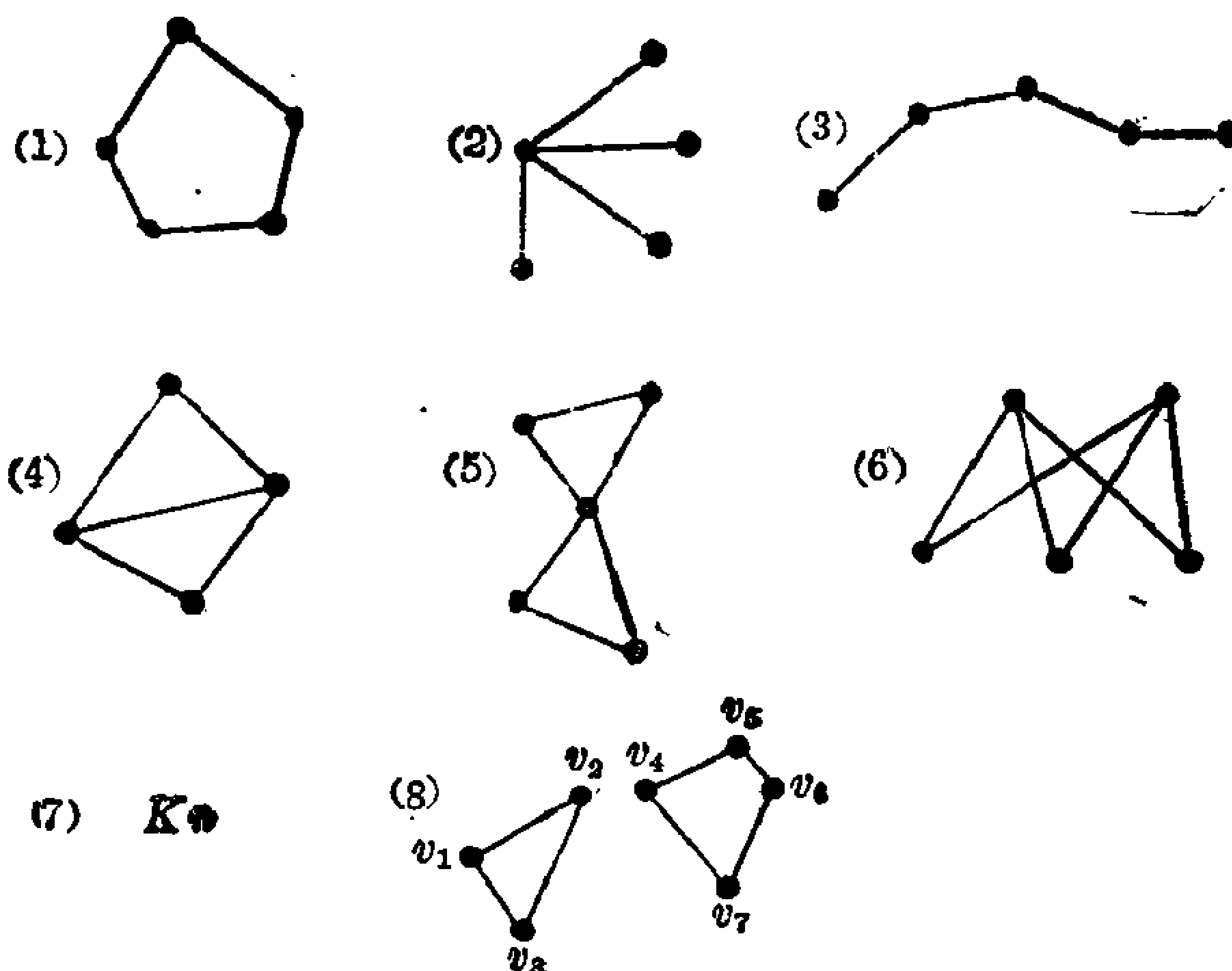
7．连通图 $G=\langle V, E\rangle$ 的切割集 F 是指 $F\subset E$，而且它使图 $G'=\langle V, E-F\rangle$ 不再连通．今已知 T 是 G 的一个生成树．求证 G 的任意切割集必含 T 的一条边．

8．任意两个顶点都邻接的图称为完全图．n 阶完全图记为 K_n．求 K_n 的边的数目；画出 K_2, K_3, K_4, K_5, K_6．

9．图 $G^*=\langle V, E^*\rangle$ 称为图 $G=\langle V, E\rangle$ 的补图，如果它们满足：

u、$v(\in V)$在 G^* 中邻接当且仅当 u、v 在 G 中不邻接。

求下列图的补图:



10. 求证任何图中的一切顶点的结合度之和必为偶数.

11. 能不能作一个图,使它有五个顶点,其结合度分别为 1、2、3、4、5?

12. m 个顶点 p 个连通部分的图包含的林最多可能有多少条边?

13. 证明有 m 个顶点 p 个连通分量的简单图 $G=\langle V, E\rangle$ 的边数满足

$$n(E)\leqslant\frac{(n-p)(n-p+1)}{2}.$$

14. 若 G 是有 6 个顶点的简单图, G^* 是它的补图. 求证 G 或 G^* 中必有三个边组成一个三角形.

15. 如果简单的单定向图 $G=\langle V, E\rangle$ 满足条件: 对任意的 v、$u\in V$, $[\overrightarrow{v, u}]$或$[\overrightarrow{u, v}]$中有且只有一个属于 E. 则称 G 为优势图. 求证优势图中必有初等完全定向道路. [提示: 用数学归纳法.]

16. 设 E_1 为连通图 $G=\langle V, E\rangle$ 中一些边的集合,而且 E_1 不含 G 中任何环路. 求证 G 有一个生成树,它以 E_1 为子集.

17. 求证: 若由 v 到 u 有一条奇数长的道路, 则必有一条奇数长的简单道路,但未必有一条奇数长的初等道路.

第二节　图的几个有关参量

2.1 贝蒂数

直观上看，当顶点数一定时，一个定向图的边数多，则出现的初等环形半道路也就可能多．一个弱连通定向图在去掉它的一个生成树的所有的定向边后，留下的定向部分图的边数在一定程度上就代表这个定向图的初等环形半道路的多寡．

定义1　弱连通定向图 $G=\langle V, E\rangle$ 在去掉它的某个生成树的所有定向边后，留下的定向部分图的边数称为定向图 G 的贝蒂数．一般定向图的贝蒂数是指它所有弱连通部分的贝蒂数之和，记成 R.

于是若 G 的弱连通部分为 $G_1=\langle V_1, E_1\rangle, \cdots, G_\rho=\langle V_\rho, E_\rho\rangle$，则它们的贝蒂数为 $n(E_1)-(n(V_1)-1)$ [$n(V_1)-1$ 是 $\langle V_1, E_1\rangle$ 的生成树的边数]，$\cdots$，$n(E_\rho)-(n(V_\rho)-1)$．因此，G 的贝蒂数 R 为

$$R=\sum_{i=1}^{\rho}[n(E_i)-(n(V_i)-1)]=n(E)-n(V)+\rho.$$

于是得到

1° 有 ρ 个弱连通部分的定向图 G 的贝蒂数

$$R=n(E)-n(V)+\rho. \tag{2.1}$$

2° 定向图无初等环形半道路的充要条件为其贝蒂数 $R=0$.

【证】　必要性：若定向图 G 无初等环形半道路，那末它必是林．因为每个树的贝蒂数为 0，所以 G 的贝蒂数为 0.

充分性：由于贝蒂数总是非负的，所以由 G 的贝蒂数为

0 可知: G 的任一个弱连通分量的贝蒂数为 0, 因而这分量是一个树, 所以 G 无环形半道路. ▌

3° 定向图有唯一的一条初等环形半道路的充要条件为其贝蒂数 $R=1$.

【证】 因为"G 有唯一的初等环形半道路"及"G 的贝蒂数 $R=1$"都与"G 恰有一个弱连通部分比树多一条边, 而其它弱连通部分都是树"等价, 所以结论成立. ▌

下面我们进一步揭示贝蒂数的具体含义. 为此先要在初等环形半道路中区分出一些更为"基本"的. 通过这些更"基本"的初等环形半道路可以得到一切初等环形半道路.

为了方便起见, 这里只讨论(无向)图, 因为讨论定向图的弱连通性与讨论图的连通性是一样的. 图也相应地有树、林、贝蒂数等概念.

定义 2 如果图 G 中的初等环路 $L=[e_1, \cdots, e_l]$ 能由其它两条初等环路 $L_1=[e_1^{(1)}, \cdots, e_{l_1}^{(1)}]$ 与 $L_2=[e_1^{(2)}, \cdots, e_{l_2}^{(2)}]$ 经过去掉相同部分的边, 而把相同部分的顶点保留(重合的只算一个), 然后把其余部分的边接起来而得到, 则称 L 是 L_1 与 L_2 的直和, 记成 $L=L_1 \oplus L_2$(参见图 5-10).



图 5-10

把以上定义写得更形式一些, 那就是:

用 L、L_1、L_2 分别代表这些初等环路的边(只看边, 不要顶点)的集合, 再用运算 $\oplus$ 表示两个集合 A 与 B 的"对称差"

$$A \oplus B = A \cup B - A \cap B. \tag{2.2}$$

若有

$$L \oplus (L_1 \oplus L_2) = \emptyset \quad (\text{或 } L = L_1 \oplus L_2), \tag{2.3}$$

则称初等环路 L 是初等环路 L_1 与 L_2 的**直和**.

注意 如果把两条初等环路 L_1 与 L_2 的相同边去掉，把相同的顶点只算一个，余下的边接起来后得到的闭路不是初等环路，则在本章的讨论中，就认为 L_1 与 L_2 的直和 $\oplus$ 没有意义.

这样，初等环路的每两个之间，就存在两种情况：有的可作直和 $\oplus$；有的没有直和 $\oplus$.

关于初等环路 L_1, L_2, L_3, 若 $(L_1 \oplus L_2) \oplus L_3$ 有意义，那末 $L_1 \oplus (L_2 \oplus L_3)$ 也有意义. 而且

$$(L_1 \oplus L_2) \oplus L_3 = L_1 \oplus (L_2 \oplus L_3).$$

这时就可以简记为 $L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$.

同样，对于 n 个初等环路，如果

$$\{[[(L_1 \oplus L_2) \oplus L_3] \oplus \cdots] \oplus L_{n-1}\} \oplus L_n$$

有意义，则这个初等环路就可记为 $L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_n$.

定理 1 设图 $G = \langle V, E \rangle$ 的贝蒂数为 R, 则 G 中存在 R 条初等环路 $L_1, \cdots, L_R$. 其中任意一个都不能表成其它 $R-1$ 个中某几个的直和 $\oplus$（这个性质叫做初等环路 $L_1, \cdots, L_R$ 的**独立性**）.

【证】 因为一般的图 G 可以分成许多连通的部分，所以不妨假定 G 是连通的.

设 G' 为 G 的一个生成树，则由贝蒂数 R 的定义可知：G 比 G' 多 R 条边：$e_1, \cdots, e_R$. 根据第一节定理 3 的 (4)，把 $e_1, \cdots, e_R$ 中任意一条加到 G'，都恰好得到 G 的一个初等环路. 设加 $e_i (i=1, \cdots, R)$ 到 G' 后得到的一个初等环路为 L_i. 那末 $L_1, \cdots, L_R$ 中每个 L_i 都有一条不属于其它 $R-1$ 个初等环路的边 e_i, 因而定理成立. 】

定理1说明了：一个具有ρ个连通分量的图$G=\langle V, E\rangle$至少有$n(E)-n(V)+\rho$个独立的初等环路.

注 实际上还可以证明：任给G的一个初等环路，一定能表成$L_1, \cdots, L_R$中某几个的直和$\oplus$. 因而$L_1, \cdots, L_R$是G的所谓“极大独立初等环路组”(所以R也叫做G的*循环数*). 但是这一事实的证明需要用线性代数的知识. 这里就不涉及了.

定义3 把G的某个结合度为2的顶点去掉，然后把以它为端点的两条边连为一条；或者在G的某条边上加入一个顶点，并把这条边看成这个新顶点联结原来两个端点的两条边. 这是两种类型的形变. 对G施行这两种类型的形变有限次后，其结果是一个图，称为G的*拓扑形变*.

图$G=\langle V, E\rangle$中的数$n(V)-n(E)$称为图G的*特征数*，记为$\chi(G)$.

G的连通分量的数目及G的贝蒂数也可以分别表示为$\rho(G)$, $R(G)$.

定理2 图$G=\langle V, E\rangle$的特征数、连通分量数及贝蒂数在拓扑形变下都不变. 也即：若G'是G的一个拓扑形变，则有

$$\chi(G')=\chi(G),\ \rho(G')=\rho(G),\ R(G')=R(G).$$

【证】 根据定义3：第一类形变减少了一个顶点和一条边；第二类形变增加了一个顶点和一条边. 因此顶点数与边数之差不变. 而拓扑形变是这两种类型连续有限次形变的结果，故顶点数与边数之差仍不变，即$\chi(G')=\chi(G)$. 而$\rho(G')=\rho(G)$是显然的，且

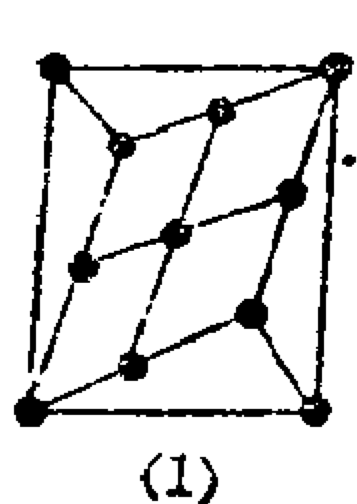
$$R(G)=\rho(G)-\chi(G).$$

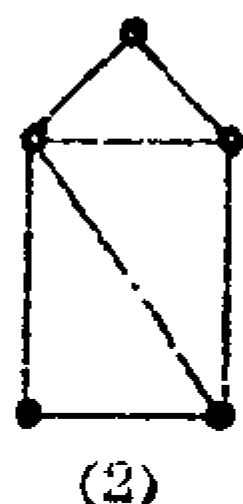
因此 $$R(G)=R(G'). \blacksquare$$

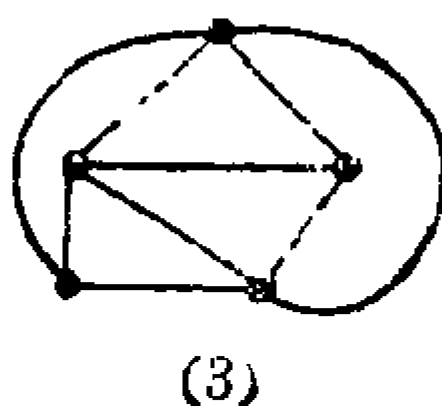
习 题 5·2(1)

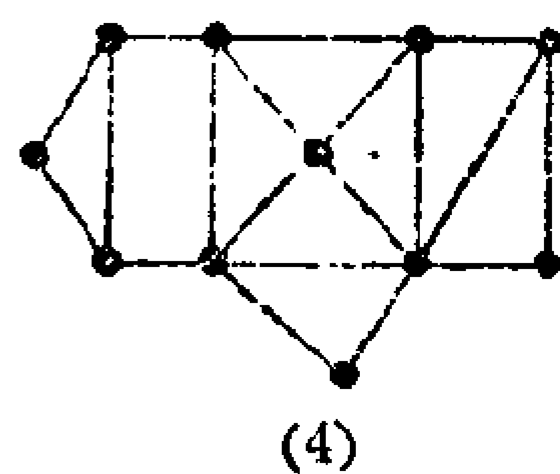
求下列图的特征数和贝蒂数:

1. G 为一环路.
2. G 为一树.
3. G 为 k 个树组成的林.
4. G 为如下各图:


(1)


(2)


(3)


(4)

2.2 着色数

在平面或球面上的地图着色的基本要求是: 有共同边界的两个国家(或省、县、区)必须着不同的颜色. 那末一个具体的区域图,至少要用多少种颜色才够呢?这也是一个图论的问题.

用顶点代表国家(或省、县、区),如果两个顶点所代表的两个国家有共同的边界,那末在这两个顶点之间画一条边,这样就得到一个简单图. 现在给每个顶点以一种颜色,两个顶点可以给相同的颜色,也可以给不同的颜色. 但是同一条边的两个端点必须给以不同的颜色. 显然,只要颜色有足够多,这种着色就可以做到. 但是能不能用较少的颜色达到同样的目的?最少需要用多少种颜色?这就是着色问题. 下面我们把它写成一个定义:

定义1 图 $G=\langle V, E\rangle$ 的一种着色,是指给每个顶点分配一种颜色,并且一条边的两个端点不能分配同种颜色. 在

G 的一种着色中，如果用了 k 种颜色，则称这种着色为 k 色着色。G 着色所需用的最少颜色数称为 G 的着色数，记为 $\gamma(G)$。也就是

$$\min\{k \mid G \text{ 为 } k \text{ 色着色的}\}.$$

显然，有圈的图不能着色，有多重边的图和只有单重边的图着色是一样的，所以在讨论时假定都是简单图。

定理 1 简单图 $G=\langle V, E\rangle$ 有

$$\gamma(G)\leqslant 1+\max_{v\in V} d(v). \tag{2.4}$$

【证】 用数学归纳法：

若 $n(V)=2$，则 $\max\limits_{v\in V} d(v)=1$，$\gamma(G)=2$，因此

$$\gamma(G)\leqslant 1+\max_{v\in V} d(v).$$

假定在 $n(V)=k(>1)$ 时，(2.4) 成立。现证 $n(V)=k+1$ 时，(2.4) 也成立。任取一个 $v_0\in V$，令 $G'=G$ 以 $V-\{v_0\}$ 的中点为顶点的子图，那末 G' 有 k 个顶点，由归纳法假设，应有

$$\gamma(G')\leqslant 1+\max_{v\in V-\{v_0\}} d_{G'}(v)\leqslant 1+\max_{v\in V-\{v_0\}} d(v)\leqslant 1+\max_{v} d(v)$$

(这里 $d_{G'}(v)$ 是指 v 在图 G' 中的结合度，它与 $d(v)$ 是不同的，后者是指 $d_G(v)$)。

现在证明能给出一个 $1+\max\limits_{v\in V} d(v)$ 种色的着色办法：设与 v_0 有边连结的全体顶点为 $v_1, v_2, \cdots, v_l$，那末 $l=d(v_0)\leqslant\max\limits_{v\in V} d(v)$。但是根据已证的 $\gamma(G')\leqslant 1+\max\limits_{v\in V} d(v)$，说明 G' 可以有 $1+\max\limits_{v\in V} d(v)$ 种着色，因此这 $1+\max\limits_{v\in V} d(v)$ 种色中总有一种色没有分配给 $v_1, \cdots, v_l$，于是可以把这种颜色分配给 v_0，因而 G' 的 $1+\max\limits_{v\in V} d(v)$ 种着色也能分配给 G，即 G 有 $1+\max\limits_{v\in V} d(v)$ 种着色。再根据着色数的定义就得到

$$\gamma(G)\leqslant 1+\max_{v\in V} d(v).$$

这说明在 $n(V)=k+1$ 时 (2.4) 也成立. 由归纳法原理可知(2.4)式恒成立. ▌

定义 2 图 $G=\langle V, E\rangle$ 如果满足: 存在二部分顶点集 V_1, V_2($V=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\emptyset$), 使同一部分的顶点之间都没有边(即对任意 u、$v\in V_1$(或 u、$v\in V_2$), u、v 之间无边), 则称 G 为二分图, 记成 $G=\langle V_1, V_2; E\rangle$; 如果对任意 $v_1\in V_1$, $v_2\in V_2$, v_1、v_2 之间均有边, 则称为完全二分图, 记成 $K_{n,m}$(其中 $n(V_1)=n$, $n(V_2)=m$).

定理 2 对于至少有一条边的简单图 $G=\langle V, E\rangle$, 下列四种说法是等价的:

(1) 着色数 $\gamma(G)=2$;

(2) G 是二分图;

(3) G 没有长度为奇数的初等环路;

(4) G 没有长度为奇数的环路.

【证】 1° (1)⇔(2) 的证明: 若已知 $\gamma(G)=2$, 则 G 的顶点可以按着色的不同分成两类, 使在同一类中的任意两顶点之间都没有边. 因此 G 是二分图. 反之, 若 G 是二分图 $\langle V_1, V_2, E\rangle$, 那么对 V_1, V_2 中的点着以不同颜色, 就可知 $\gamma(G)\leqslant 2$. 但因 G 至少有一条边, 所以显然 $\gamma(G)>1$, 因此 $\gamma(G)=2$.

2° (1)⇒(3) 的证明: 用反证法: 已知 $\gamma(G)=2$, 设 (3) 不成立, 即 G 存在一条长度为奇数的初等环路, 则在这环路上就有奇数个顶点, 而这环路的顶点无法分配以相间的两种颜色. 即至少需要三种颜色才能着色. 因此 $\gamma(G)\geqslant 3$. 这与假设相矛盾. 说明(3)必成立.

3° (3)⇒(4)的证明：也用反证法：设(4)不对，即 G 中存在一条长度为奇数的环路 $L=[\overline{v_0v_1}, \overline{v_1v_2}, \cdots, \overline{v_{2n-1}v_{2n}}, \overline{v_{2n}v_0}]$，由题设(3)，它不是初等的. 因此必定存在 v_j、v_k ($j<k$)，使 $v_j=v_k$，于是 L 可以分成两条环路，其中一条是

$$L_1'=[\overline{v_jv_{j+1}}, \overline{v_{j+1}v_{j+2}}, \cdots, \overline{v_{k-1}v_k}],$$

余下的部分为另一条环路 L_1''. 由于 L 的长度是奇数，因此 L_1' 与 L_1'' 中必有一条长度也是奇数，记为 L_1，它的长度比 L 的长度短，由题设：L_1 也不能是初等的. 再用 L_1 代替 L，重复上述的步骤，就可得一条长度为奇数的环路 L_2，L_2 比 L_1 短. 重复这种步骤有限次后，就得到了一条长度为奇数且最短的环路 L_r，它必是初等环路(因为否则，它还可以分解，就能得到一条长度为奇数且更短的环路 L_{r+1}，这就与 L_r 最短相矛盾)，这导致与题设(3)相矛盾. 说明(4)必成立.

4° (4)⇒(1)的证明：若 G 连通，那末在 G 中任取顶点 v_0 着以红色，再把与 v_0 有边连结的顶点都着以蓝色，然后把与这些蓝色点有边连结的顶点都着以红色，……继续下去. 我们要说明不可能有一个顶点被着以两种颜色，如果相反，设有一个顶点 v^* 被着以红、蓝两色，令 $V_1=\{v|v\in V$，且从 v_0 到 v 存在一条长度为奇数的道路$\}$；$V_2=\{v|v\in V$，且从 v_0 到 v 存在一条长度为偶数的道路$\}\cup\{v_0\}$. 由定义知 V_1 的点都是蓝色点，V_2 的点都是红色点，可知 $v^*\in V_1\cap V_2$，于是由 $v^*\in V_1$ 及 V_2 可知：分别存在一条从 v_0 到 v^* 的长度为奇数和偶数(或 0) 即 $v^*=v_0$)的道路 L_1 与 L_2. 把 L_1 和 L_2 合起来就是一条长度为奇数的环路，这样就导致与假设相矛盾. 因此就证得：对同一点着以两种颜色是不可能的. 这就说明了 $\gamma(G)\leqslant 2$，但 G 至少有一条边，因此 $\gamma(G)>1$，所以 $\gamma(G)=2$.

如果 G 不连通，那末可设 G 有 l 个连通分量 $G_1, \cdots, G_l$,

由上段所证可知：$\gamma(G_1)=\cdots=\gamma(G_l)=2$，因此

$$\gamma(G)=\max_{1\leqslant i\leqslant l}\gamma(G_i)=2.\ \rbrack$$

定义 3 设 $G=\langle V, E\rangle$ 为简单图．若 u、$v\in V$，且 u、v 之间无边．则称图 $\langle V, E\cup\{[u, v]\}\rangle$ 为 G 的把 u、v 连起来的扩图，记成 G_{u-v}．它只比 G 多一条边 $[u, v]$．又如果把任意的 u、$v\in V$，看成同一个点 u^*，并且对 V 中任意其它的点 v_1 与 u^* 之间当且仅当 u，v 之一与 v_1 之间有边时才认为有边，这样得到的图称为 G 的把 u、v 合并后的缩图，记成 $G_{u=v}$（参见图 5-11）．

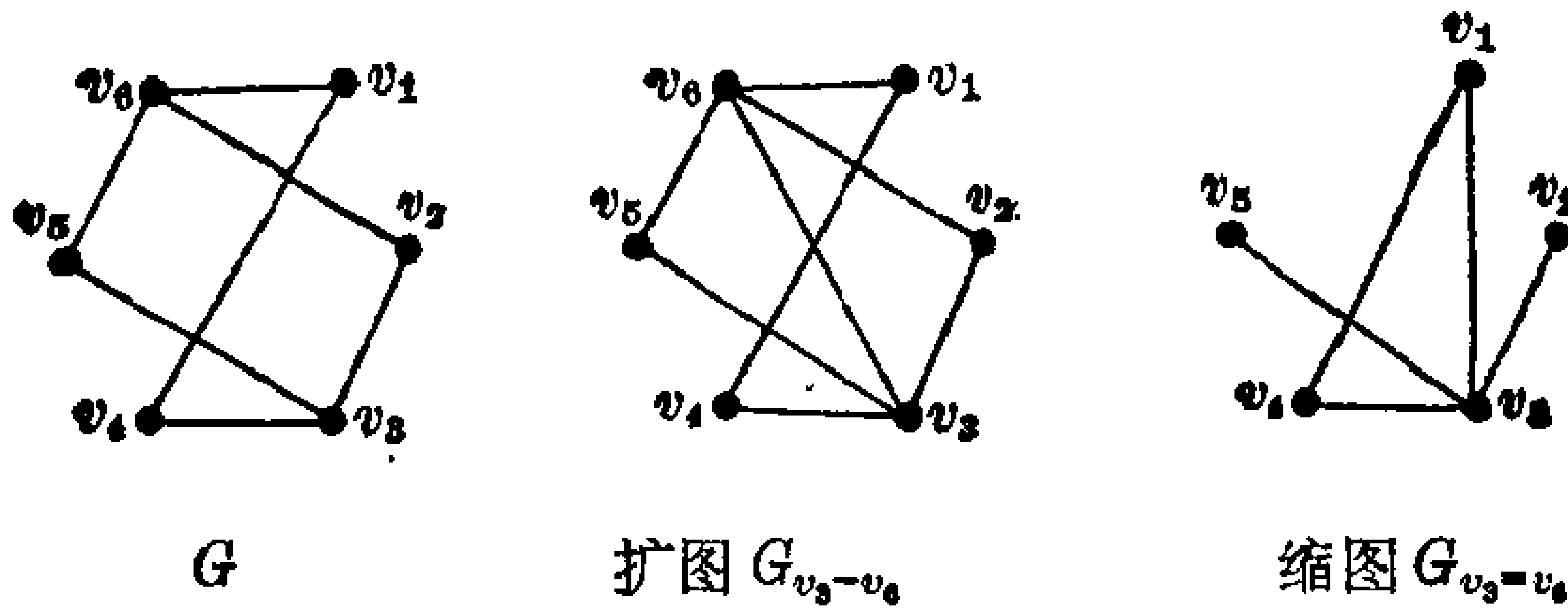


图 5-11

定理 3 设 u、v 是简单图 $G=\langle V, E\rangle$ 中没有连边（即 u、v 之间无边）的两个顶点，则

$$\gamma(G)=\min(\gamma(G_{u-v}),\ \gamma(G_{u=v})). \qquad (2.5)$$

【证】 设 $\gamma(G)=l$，并且给 G 着上了 l 种色．

如果 u 与 v 不同色，则在它们间加一条边，连起来后的扩图 G_{u-v} 仍是着了 l 种色的，因此

$$\gamma(G_{u-v})\leqslant l=\gamma(G).$$

如果 u 与 v 同色，那末把它们合并后，得到的缩图 $G_{u=v}$ 也是着了 l 种色的，因此

$$\gamma(G_{u=v})\leqslant l=\gamma(G).$$

把两者合起来，就得到

$$\min(\gamma(G_{u-v}),\ \gamma(G_{u=v}))\leqslant\gamma(G).$$

另一方面，如果 $\gamma(G_{u-v})=k$，并且用 k 种颜色给 G_{u-v} 着了色，那末在 G 上也就用 k 种颜色着了色，由于 u 与 v 的颜色不同，所以 $\gamma(G)\leqslant k=\gamma(G_{u-v})$；又如果 $\gamma(G_{u=v})=k'$，并且用 k' 种颜色给 $G_{u=v}$ 着了色，那末在 G 上也就用 k' 种颜色着了色. 所以

$$\gamma(G)\leqslant k'=\gamma(G_{u=v}).$$

与上面的不等式合起来，就得

$$\gamma(G)\leqslant\min(\gamma(G_{u-v}),\ \gamma(G_{u=v})).$$

因此 $\gamma(G)=\min(\gamma(G_{u-v}),\ \gamma(G_{u=v}))$. ∎

下面给出计算一个简单图的着色数的递推方法. 首先注意：由定理 3 可知只需算出 $\gamma(G_{u-v})$ 及 $\gamma(G_{u=v})$ 就能得到 $\gamma(G)$. 同时由于 G_{u-v} 的边比 G 多，$G_{u=v}$ 的点比 G 少，可见 G_{u-v} 与 $G_{u=v}$ 比 G 更接近于完全图（每两个顶点之间都有边的图）.

计算 $\gamma(G)$ 的步骤 设 $G=\langle V,\ E\rangle$，$n(V)=m$，

1° 若 G 是完全图，则

$$\gamma(G)=n(V)=m.\quad\text{（请读者自证.）}$$

2° 若 G 不是完全图，则总有 u、$v\in V$，u、v 之间无连边. 由定理 3：要计算 $\gamma(G)$ 只需计算 $\gamma(G_{u-v})$ 及 $\gamma(G_{u=v})$.

(1) 若 G_{u-v} 是完全图，则 $\gamma(G_{u-v})=m$；若 G_{u-v} 不是完全图，那末把 G_{u-v} 看成 2° 中的 G，再重复 2° 的步骤.

(2) 若 $G_{u=v}$ 是完全图，则 $\gamma(G_{u=v})=m-1$（因 $G_{u=v}$ 比 G 少一个顶点）；若 $G_{u=v}$ 不是完全图，那末把 $G_{u=v}$ 看成 2° 中的 G，再重复 2° 的步骤.

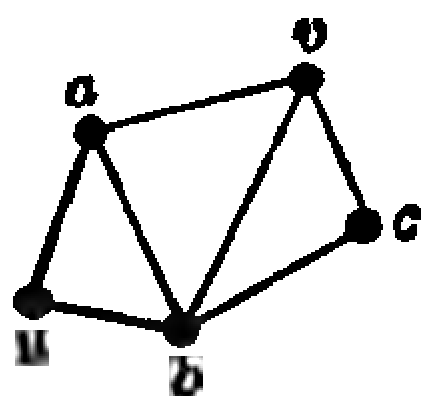
如此重复有限次后，就能逐步地算出 $\gamma(G)$.

这种方法在人工计算时，并不比逐点试探地着色方法简

单. 但它的优点是便于利用计算机来计算一个图的着色数.

习　题　5·2(2)

1. 什么图的着色数为 1?
2. 求初等环路的着色数.
3. 求树的着色数,林的着色数.
4. 求一个立方体的边和顶点的图的着色数. 如果将立方体换成正四面体或正八面体时,着色数分别为多少?
5. 求有 n 个顶点的完全图 K_n(见习题 5·1)的着色数.
6. 求习题 5·2(1)第 4 题中各图的着色数.
7. 求下述图的 G_{u-v}, $G_{u=v}$, $\gamma(G)$.



8. 求证由 K_n 中去掉一条边后所得到的图的着色数为 $n-1$.
9. 求证由 K_n 中去掉两条互不邻接的边后所得到的图 G 的着色数为 $n-2$.
10. 求证在完全二分图 $K_{n,m}$ 中再加进一条边(但顶点保持不变)后,就不再是二分图了. 这时的新图 G 的着色数为多少?
11. 有限条直线把平面分成若干部分并给每一部分着以同一种色,若要求有共同边界(但一个点不算共同边界)的两个部分必须着以不同的颜色,问至少应该用多少种色才能把平面着上色?

*2.3　连通度

从一个图中去掉尽量少的顶点及从这个顶点出发的边后,得到的是一个不连通的图或一个点. 去掉的最少顶点的数目叫做这个图的连通度. 确切的说,就是

定义 1　设图 $G=\langle V, E\rangle$, 给定 $A\subset V$, 将以不在 A 中的点为顶

点的 G 的子图记为 G_{V-A}，那末 $\min\{n(A)\mid A\subset V,\ G_{V-A}$ 不连通或 G_{V-A} 是一个单点$\}$ 称为 G 的连通度（一般记为 $\chi(G)$）（见图 5-12）。

显然，如果 G 不连通，那末 $A=\emptyset$，所以 $\chi(G)=0$。

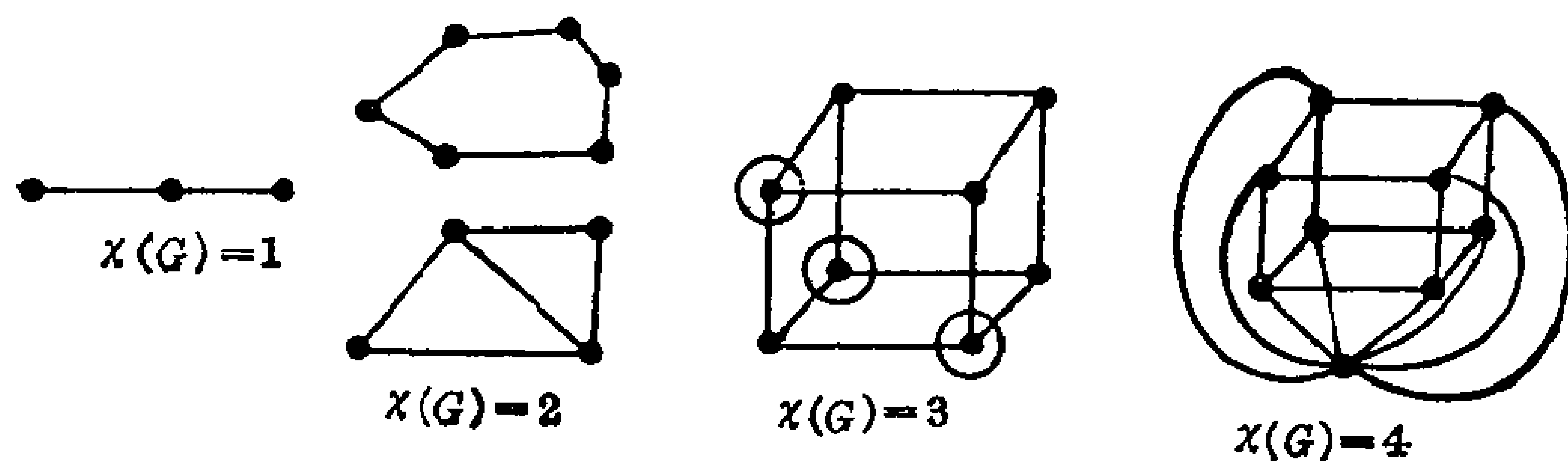


图 5-12

*2.4 稳定度数

【例】 若有五种信号 a、b、c、d、e. 已知发方发 a 时，收方可能收到 p 或 q；发方发 b 时，收方可能收到 q 或 r；发方发 c 时，收方可能收到 r 或 s；发方发 d 时，收方可能收到 s 或 t；发方发 e 时，收方可能收到 t 或 p. 问最多可用 a、b、c、d、e 中几个信号才可保证收到的信号不会混淆？

解：把 a、b、c、d、e 这五种信号分别看成五个顶点. 如果在两个顶点之间收方可能混淆，则在这两个顶点之间联一条边，于是得到一个图 G（见图 5-13）.

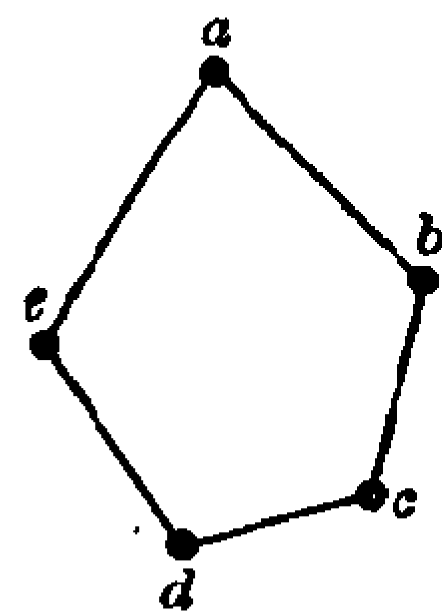


图 5-13

要在收方不致混淆的前提下，尽量多使用这 5 个信号中的一部分，就必须寻找 G 中两点之间没有边的足够多的顶点. 在本题中这种顶点最多为 2. 能使用的信号用 $\{a, c\}$ 或 $\{b, d\}$ 或 $\{c, e\}$ 或 $\{d, a\}$ 或 $\{e, b\}$ 表示之. 这五个（顶点）集中的每一个都叫做 G 的内部稳定集.

第三节 欧拉道路、哈米尔顿道路、最短程道路

3.1 欧拉道路

图论最早开始于哥尼斯堡（今加里宁格勒）的七桥问题.

从前在东普鲁士的城市哥尼斯堡有七座桥连结布雷格尔河的两岸与河中两个小岛.那里的居民在星期日有散步的习惯,有的人就想能不能找到一条路可经过每一座桥，而且恰好只经过一次?这些人实践了许多次,但总不能解决这个问题. 1736年瑞士大数学家欧拉解决了这个问题. 他证明了这样的一条路是不存在的. 欧拉的考虑方法标志着图论的诞生.

如果把河岸两边及两个岛分别考虑成一个点，把桥考虑为边后，七桥图就变成了一个有 4 个顶点与 7 个边的多重图(图 5-14). 于是得

$$d(A)=d(C)=d(D)=3,\ d(B)=5.$$

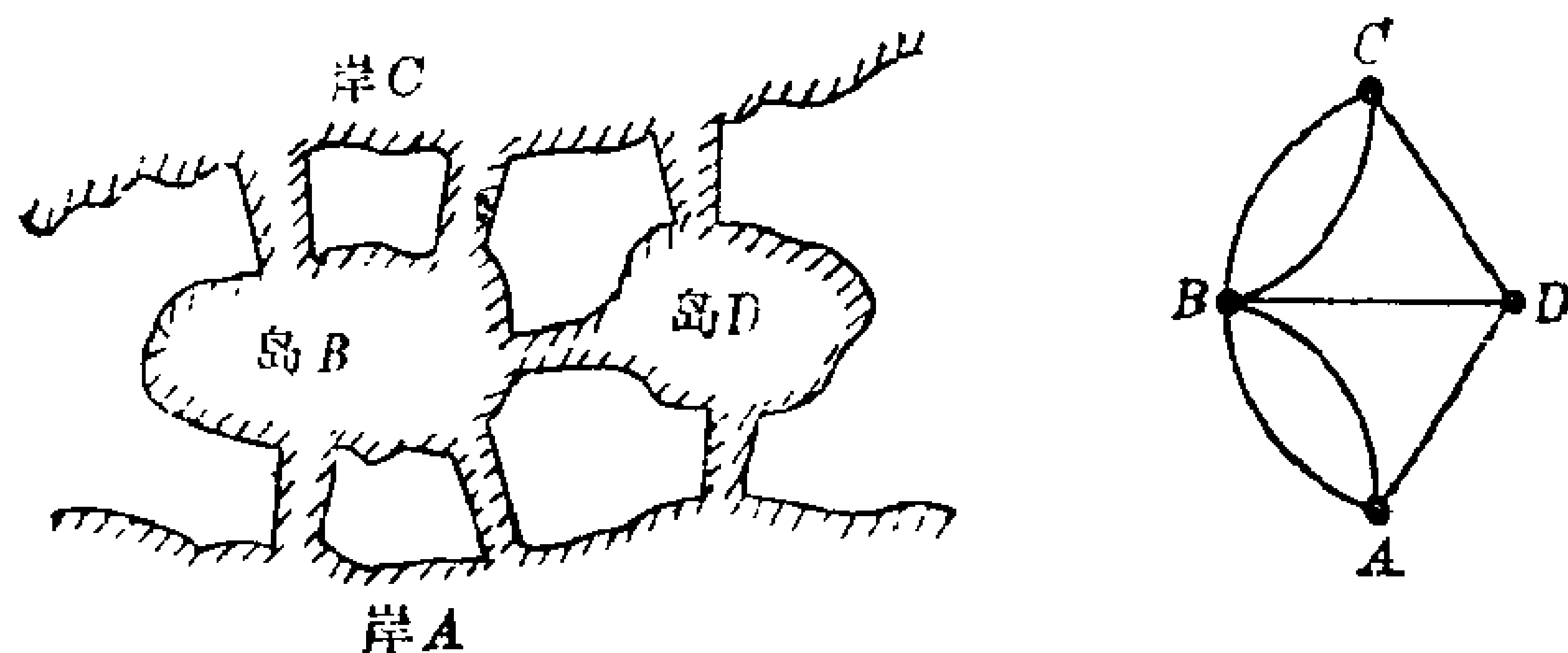


图 5-14 哥尼斯堡七桥

这样,七桥问题就变成一个"一笔画"问题,即能不能用一笔画出图 5-14 中右边的图来?对于这类问题，欧拉的考虑方法是这样的：如果存在一种一笔画的方法. 那末顶点总可以分成两类：一类是起笔点和落笔点(它们两点也可能合为一点)；另一类是中间经过点. 画笔每经过某个中间点一次时，总经过两条不同的边，所以每个中间点的结合度数值必须是偶数. 对于起笔点和落笔点,又可分两种情形:(一)它们不是同一点，起笔时只经过一条边，以后的画笔再经过起笔点时，因为不能停笔，就须经过两条不同的边. 所以这时起笔点的结合度数值应为奇数. 同理，落笔点的结合度数值也应为奇

数．(二)起笔点与落笔点重合．这时画出的是一个简单环路，因而在落笔时也经过一条不同的边才能到达起笔点，所以这时起笔点的结合度数值也是偶数．

把以上讨论综合起来就得到：一个图可一笔画的必要条件为：

或者只有两个顶点的结合度为奇数，或者所有顶点的结合度为偶数．

再看七桥问题，它的四个顶点的结合度都是奇数．因此不能一笔画．

现在给出一般的定义：

定义1 经过一个图的所有边的简单道路叫做**欧拉道路**．闭的欧拉道路叫做**欧拉环路**．

定理1 一个连通图 G 有：

(1) G 中有欧拉环路的充要条件为：所有顶点的结合度均为偶数；

(2) G 中有非闭的欧拉道路的充要条件为：恰有两个顶点的结合度为奇数．

【证】 必要性已在上面的讨论中证明．现证充分性：

在情形(1)时，所有顶点结合度都是偶数．任取一个顶点 v．把从 v 出发且长度最长的简单道路记为 γ，它必为环路．若不然，它就一定终止于某个顶点 $u\neq v$，但是 $d(u)=$ 偶数，所以必定还有一条从 u 出发而不属 γ 的边．这就导致与“γ 最长”相矛盾．

下面证明 γ 必是欧拉环路，若相反，就是说，在 γ 外还有 G 的边，由于 G 的连通性，G 就必有不属于 γ 但从 γ 上某个顶点 v_0 出发的边 e_0．

把从 G 中去除 γ 上的边后得到的部分图记为 $G^{\#}$．那末

$G^{\#}$ 中顶点的结合度也都是偶数. 而 v_0 作为 $G^{\#}$ 的顶点至少是 $G^{\#}$ 中的边 e_0 的端点，因此，由 v_0 出发在 $G^{\#}$ 中长度最长的简单道路(记为 γ^*)也必是环路. 这样，在 G 中，γ 与 γ^* 都是经过 v_0 的不同环路. 这两条简单环路合起来，仍是一条从 v 出发的简单道路，它比 γ 长，这就出现了矛盾. 从而(1)的充分性成立.

在情形(2)时，G 只有两个顶点 u 和 v 的结合度为奇数. 设 $G=\langle V, E\rangle$，在 u 与 v 之间加联一条不属于 E 的边 e_0. 记

$$G^{\#}=\langle V, E\cup\{e_0\}\rangle.$$

于是 $G^{\#}$ 满足(1)的条件，因此在 $G^{\#}$ 中有一条欧拉环路 γ，在 γ 中去掉边 e_0，就得到 G 的一条欧拉道路. 因此(2)的充分性得证. ∎

定理 1 是个判别法简单可行. 如果一个图已判定可以"一笔画"，那末具体如何画？也就是说，欧拉道路或欧拉环路如何找？下面用数学归纳法给出一个找法：

欧拉环路的找法 如果 $G=\langle V, E\rangle$ 的一切顶点的结合度均为偶数. 设 $n(E)=n$.

1° 任取一个顶点，记成 v_0；任取一条从它出发的边，记成 e_1.

2° 设走了 k 条边 $e_1, e_2, \cdots, e_k$，到了顶点 v_k，只需给出第 $k+1$ 条边如何走就行了.

3° 现在给出第 $k+1$ 条边的取法：

令 $$G_k=\langle V, E\setminus\{e_1, \cdots, e_k\}\rangle.$$

由于 G 的所有顶点结合度都是偶数，所以只有 $[e_1, \cdots, e_k]$ 的起点 v_0 和终点 v_k 在 G_k 中的结合度为奇数，而在 G_k 中其它点的结合度仍为偶数. 因此，由定理 1 知：在 G_k 中必有从 v_k

到 v_0 的欧拉道路.

当 G_k 中以 v_k 为端点的边只有一条时，这条边就取成 e_{k+1}；当 G_k 中以 v_k 为端点的边不止一条时，则可断定在这样的边中必存在某一条边 e，在去掉它以后，G_k 中不会出现一个边集非空且与 v_k 不连通的部分子图. 用反证法证明这个事实：假设相反. 那末在 G_k 中至少存在 e' 及 e''，它们以 v_k 为端点，且当分别去掉 e' 及 e'' 后，G_k 中分别出现不与 v_k 连通的部分子图 G'_k 与 G''_k，同时 G'_k 与 G''_k 分别至少含有一条边. 于是此时在 G'_k 中必有一个顶点(记为 u')在 G_k 中的结合度为奇数(因为若设 $e'=[v_k, v']$，那末 v' 在 G'_k 中的结合度为奇数，但 G'_k 中所有点的结合度的总和为偶数，所以 G'_k 中必还有一个点 u' 在 G'_k 中的结合度为奇数. 因为 $u'\neq v'$，从而它在 G_k 中的结合度就是它在 G'_k 中的结合度，所以是奇数). 同样，在 G''_k 中还有一个顶点 u'' 在 G_k 中的结合度也是奇数. 显然，由 G'_k 与 G''_k 的定义，有 $u'\neq u''$. 这样在 G_k 中，就可找到三个结合度均为奇数的点：v_k, u', u''. 这与前面已证明的事实相矛盾. 这就说明了"e 存在"的论断是正确的.

令 $e_{k+1}=e$ (就是 e_{k+1} 取得使留下的部分仍能回到 v_k)，这样经过有限步后，最后必能取完 G 的所有的边，而且终点为 v_0(这是因为只剩最后一条边时，这条边就是 e_n，它是 G_{n-1} 的唯一的一条边，在 G_{n-1} 中必有 v_{n-1} 到 v_0 的欧拉道路，这欧拉道路就是边 e_n).

欧拉道路的找法 如果在 $G=\langle V, E\rangle$ 中只有顶点 v_1、v_2 的结合度为奇数，则在 v_1、v_2 间加进一条边$[v_1, v_2]$后，找新图的欧拉环路. 然后把加进去的边去掉，这样就得到了由 v_1 到 v_2 的一条欧拉道路.

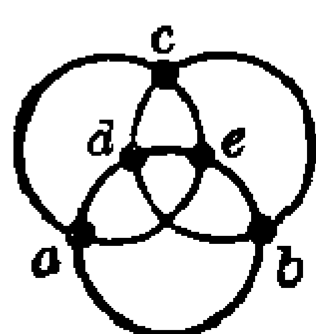
这一段叙述说明了：存在欧拉道路的连通图就是能一笔

画的图.

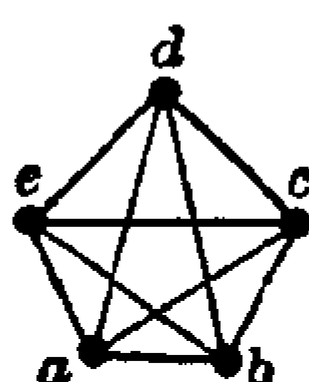
习 题 5·3(1)

1. 下列图能否一笔画? 如果能, 则请画出一条欧拉道路或欧拉环路:

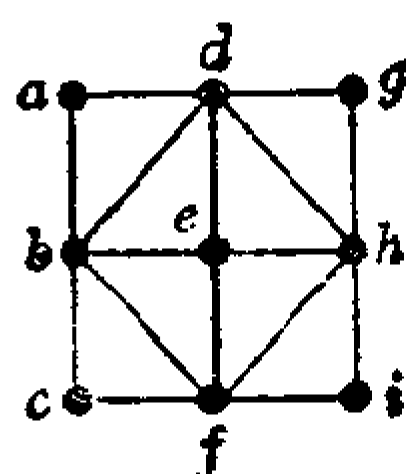
(1)



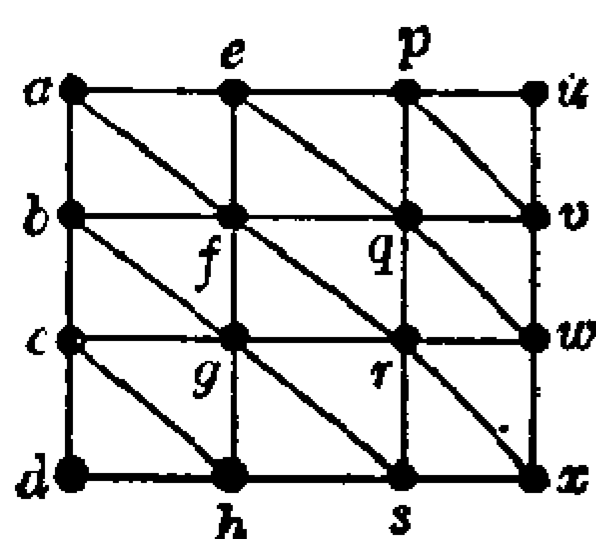
(2)



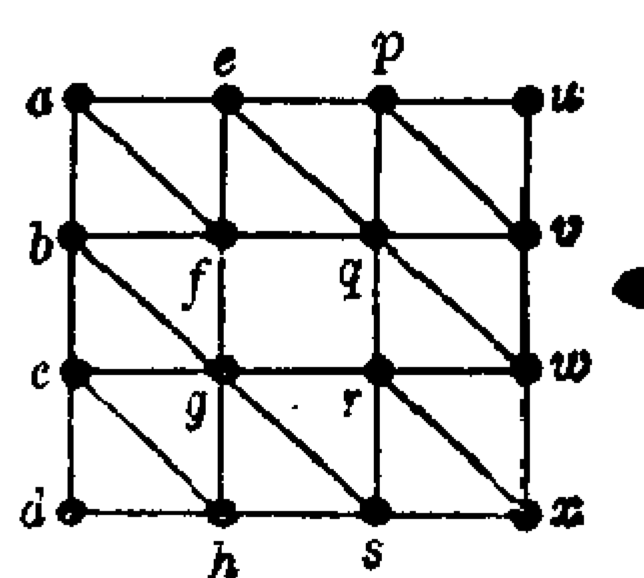
(3)



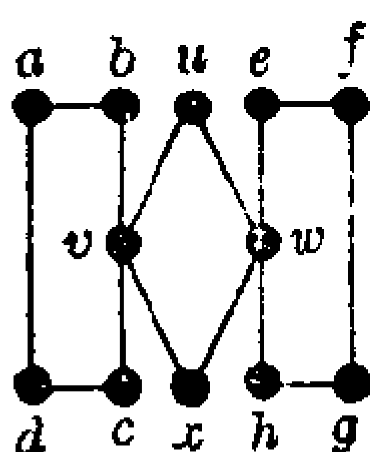
(4)



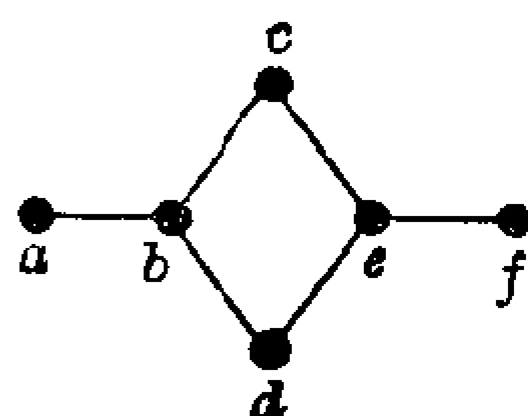
(5)



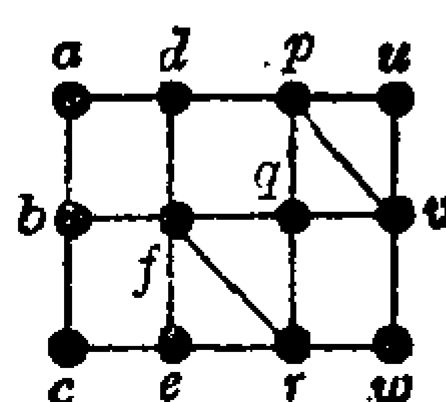
(6)



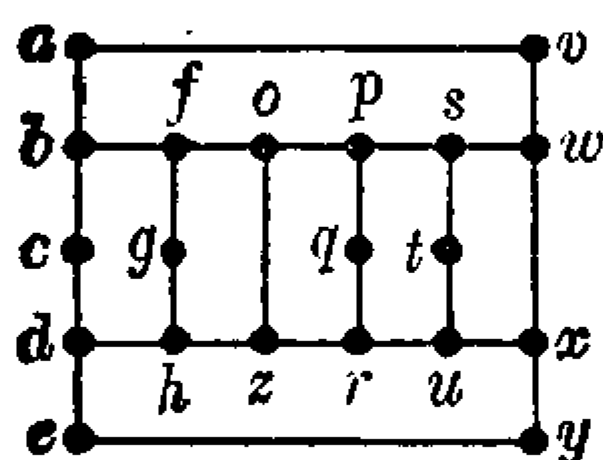
(7)



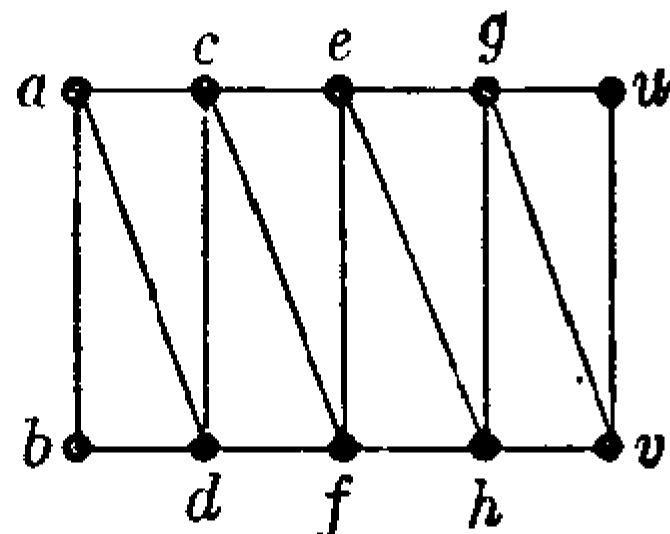
(8)



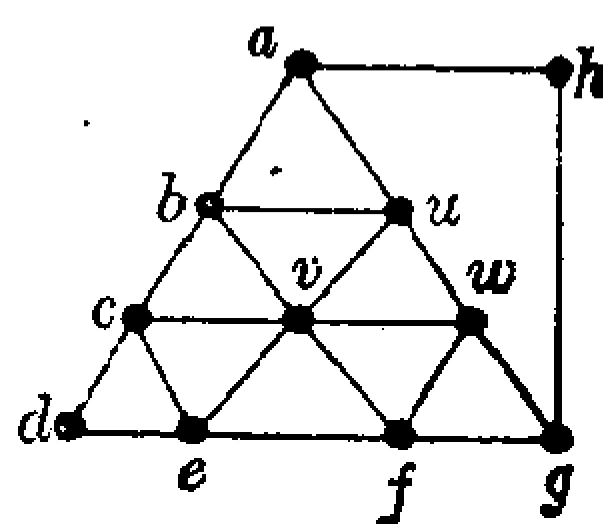
(9)



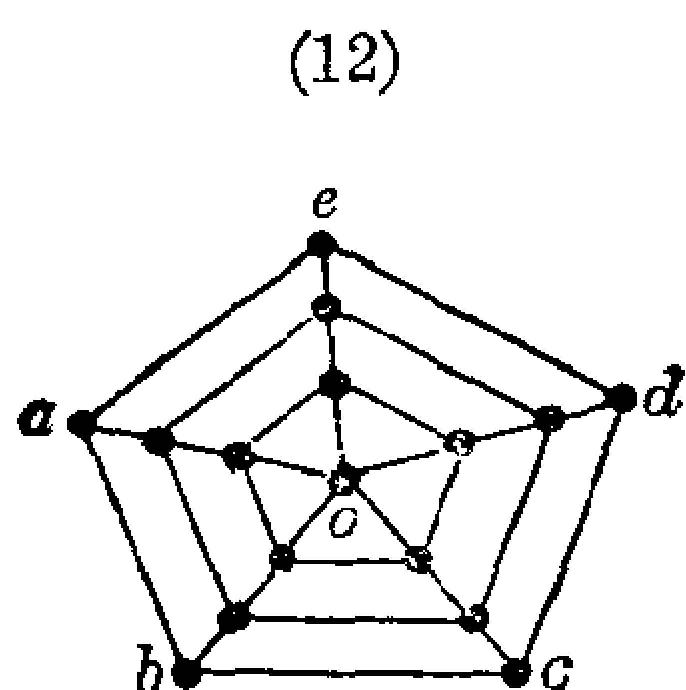
(10)



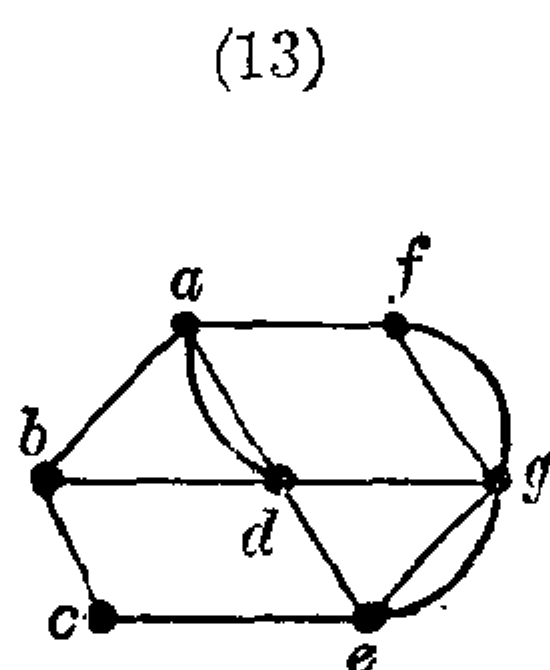
(11)



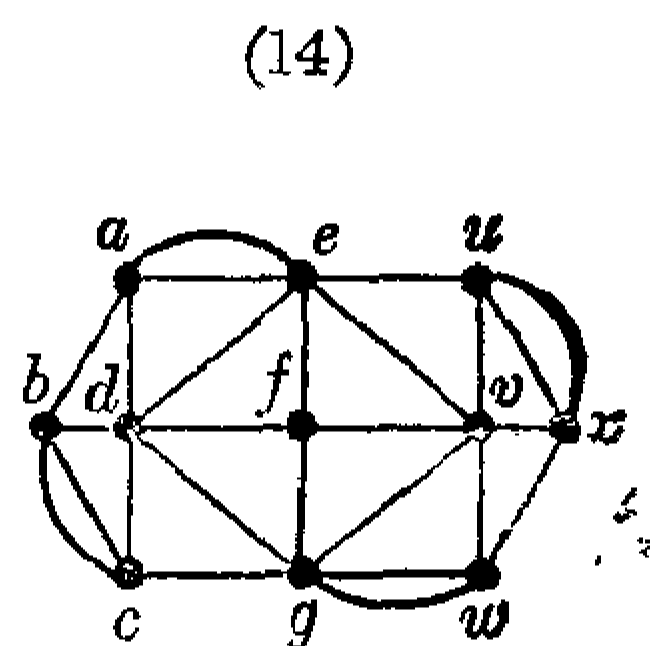
(12)



(13)



(14)

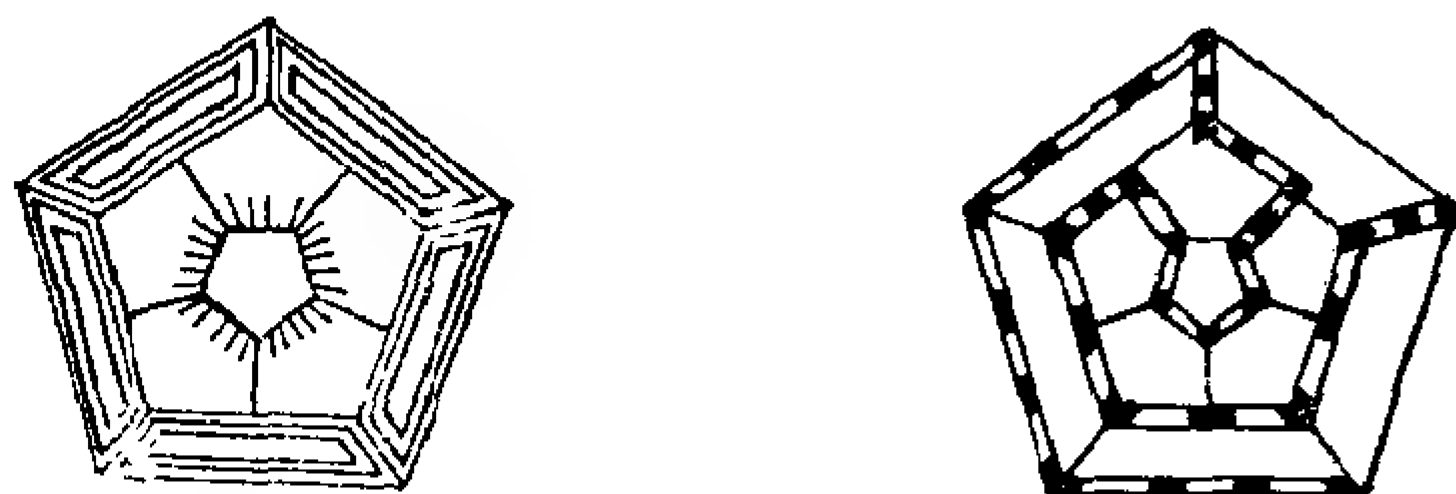


2. n 个顶点的完全图 K_n 有没有欧拉道路或欧拉环路?

3. 若图 G 恰有两个顶点 u、v 的结合度为奇数. 在 u、v 之间加进一条边后,得到的新图为 G'. 求证: G 连通等价于 G' 连通.

3.2 哈米尔顿道路

1857 年爱尔兰数学家哈米尔顿提出了一个 12 面体问题:能不能沿着 12 面体的边(图 5-15)把所有的顶点恰好走过一次(不要求走完所有的边)?



(这里画了 11 个面,还有一个面被挡住了)

图 5-15

与上述同一类型的问题,还有:

设有 n 个城市,每两个城市之间有的没有直达公路,有的可能有几条直达公路. 问能不能有一条路线,刚好使人游览每个城市一次而不重复?

用图论的语言说:这个问题就是:对于一个给定的图,是否存在一条道路,它经过且恰好经过每个顶点一次?因而也是哈米尔顿道路问题.

定义 1 经过一个图的所有顶点的初等道路称为哈米尔顿道路. 闭的哈米尔顿道路叫做哈米尔顿环路.

一个图是否存在哈米尔顿环路的充要条件至今还不知道.

定理 1 若 $G=\langle V, E\rangle$ 是一个顶点不少于3的简单图(即 $n(V)\geqslant 3$), 如果对任意两个无边相联的顶点 v 和 u 均有

$$d(v)+d(u)\geqslant n(V). \tag{3.1}$$

那末 G 有哈米尔顿环路.

【证】 (1) 首先说明, 此时 G 是连通的. 若相反, 则 G 至少有两个连通分量, 设它们分别有 n_1、n_2 个顶点. 在这两个连通分量中, 各取一个顶点 u 及 v, 那末

$$\begin{aligned} d(u)+d(v) &\leqslant (n_1-1)+(n_2-1) \\ &\leqslant (n_1+n_2)-2\leqslant n(V)-2. \end{aligned}$$

这与定理的条件相矛盾.

令 γ 为 G 中任意一条最长的初等道路. 设 γ 从顶点 v_1 出发, 经过 v_2, $\cdots$, v_{l-1}, 终止于 v_l. 其长度为 l, 显然应满足条件

$$l\leqslant n(V).$$

(2) 若 v_1 与 v_l 有边相连, 则 v_1, v_2, $\cdots$, v_l, v_1 就是一条初等环路. 特别当 $l=n(V)$ 时, 它就是一条哈米尔顿环路.

(3) 若 v_1 与 v_l 之间无边. 我们证明下述事实(F)成立(见图5-16):

"可以找到某个 $k_0(3\leqslant k_0\leqslant l-1)$, 使 v_1 与 v_{k_0} 之间有边, 并且 v_{k_0-1} 与 v_l 之间也有边". (F)

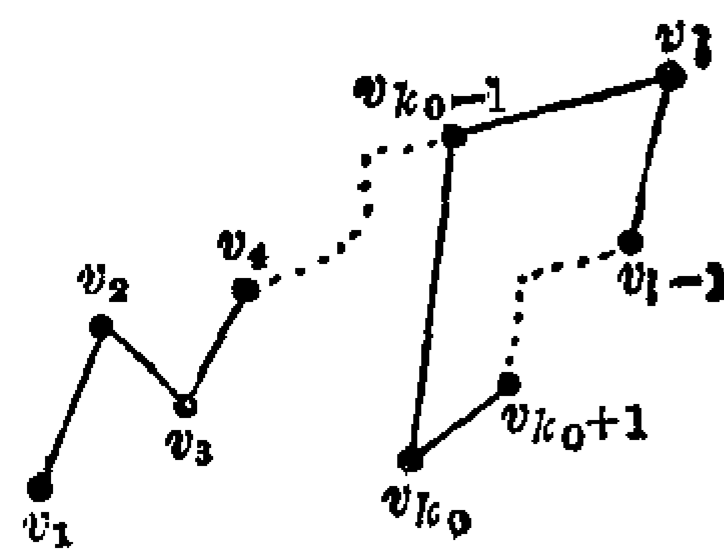


图 5-16

用反证法证: 假设(F)不成立. 那末与 v_l 有边相连的 $d(v_l)$ 个顶点的后继者 (姑且称 x_{k+1} 为 x_k

的"后继者")都不能是 $v_2, \cdots, v_{l-1}$ 中与 v_1 有边相连的那 $d(v_1)$ 个顶点. 因此

$$d(v_l) \leqslant (l-2) - d(v_1),$$

即
$$d(v_1) + d(v_l) \leqslant l-2 < n(V).$$

这与假设相矛盾. 故(F)必成立.

(4) 于是在 v_1, v_l 之间无边相连时, 由事实(F)可知: $v_1, \cdots, v_{k_0-1}, v_l, v_{l-1}, \cdots, v_{k_0}, v_1$ 是一条初等环路, 记成 γ'.

如果 $l=n(V)$, 则 γ' 就是哈米尔顿环路.

(5) 由(2)和(4)可知: 在 $l=n(V)$ 时, 定理是正确的. 而在 $l<n(V)$ 时, 存在一条经 l 个顶点的初等环路. 下面证明这种情形是不可能的:

设这初等环路为 $u_1, u_2, \cdots, u_l, u_1$. 由于 $l<n(V)$, 必定还存在环路外的某个顶点 u_0, 再由 G 的连通性, u_0 必与 $u_1, \cdots, u_l$ 中某个顶点 u_{k_0} 有边相连. 这样, $u_0, u_{k_0}, u_{k_0+1}, \cdots, u_l, u_1, u_2, \cdots, u_{k_0-1}$ 就是一条长度为 $l+1$ 的初等道路. 这与(1)中假定 G 的最长初等道路的长度为 l 相矛盾. 因而 $l<n(V)$ 不可能. 留下唯一的情形是 $l=n(V)$. 于是定理得证. ▌

推论 3个顶点以上的简单图, 如果有

$$\min_{v \in V} d(v) \geqslant \frac{n(V)}{2},$$

则该图有哈米尔顿道路.

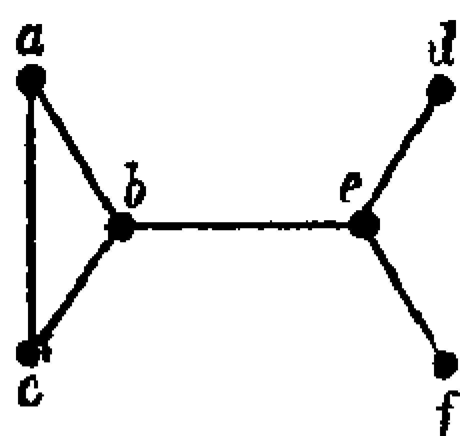
有没有一个寻找哈米尔顿道路或判别其存在与否的一般办法呢? 至今还没有. 目前只有一些判别存在性的充分条件. 在计算机上编一个寻找哈米尔顿道路的程序, 其计算量也是大得惊人的.

显然一个图形的边越多, 存在哈米尔顿道路的可能性也就越大.

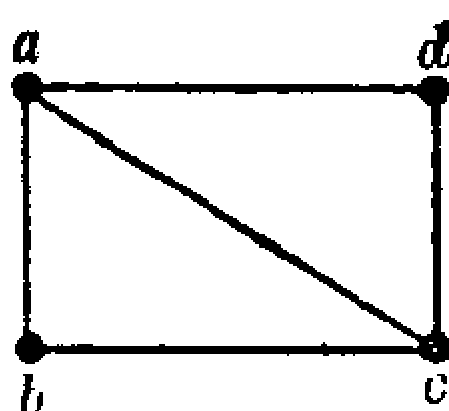
习 题 5·3(2)

1. 在下列图中，哪些有哈米尔顿道路或环路？

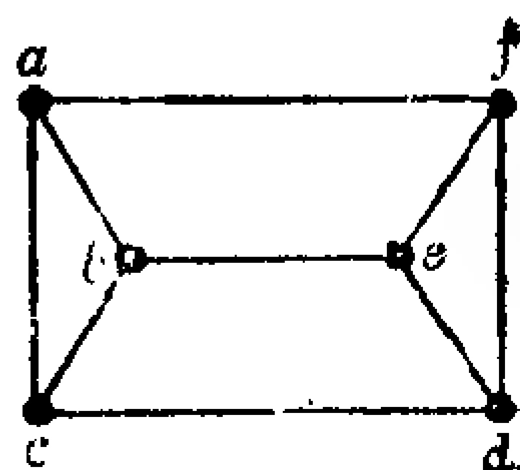
(1)



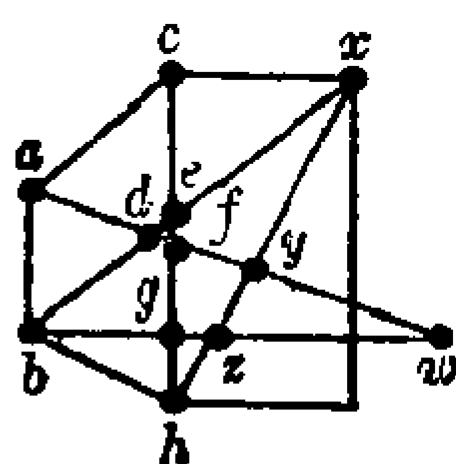
(2)



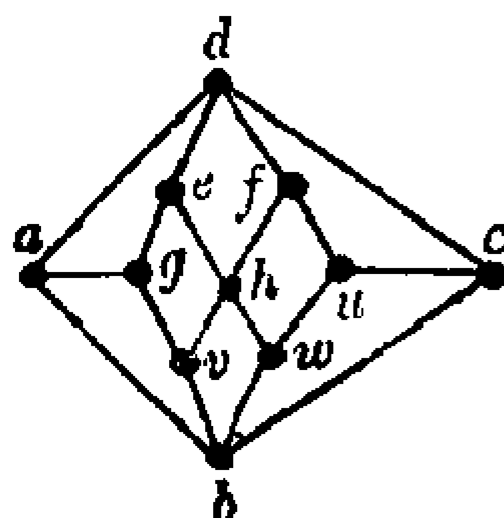
(3)



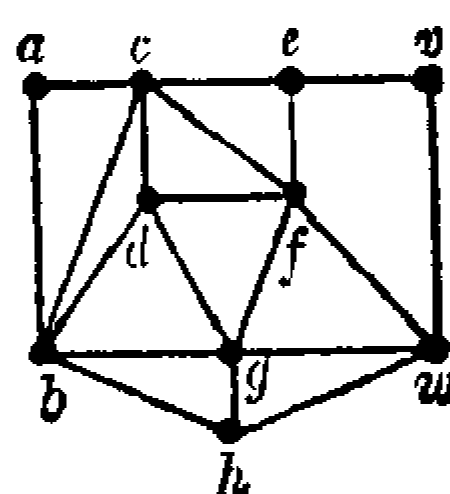
(4)



(5)



(6)



2. 求证完全图必有哈米尔顿环路.

3. 树有没有哈米尔顿道路?

3.3 最经济道路

问题1 有 m 个城市(每个记成一个顶点)，两两之间可以没有直达公路，可以恰有一条直达公路. 每条公路上有公共汽车(把公路记成边)，乘车要付一定的票价. 问从城市 u 到城市 v 的最经济道路如何选取?

这个问题就是对一个加权(即每条边上给以一个正数的图)简单图上的两个顶点之间求最经济道路的问题.

设图 $G=\langle V, E\rangle$，对每个 $e\in E$，有一个价格 $c(e)$. 对 u、$v\in V$，令 u 到 v 的一条道路 L 为 $u, v_1, \cdots, v_{l-1}, v$，那末沿 L 的价格为

$$c(L)=c([u, v_1])+c([v_1, v_2])+\cdots+c([v_{l-1}, v]). \quad (3.2)$$

问题是要对一个具体的图，在给定 u 和 v 以后，找一条由 u 到 v 的道路，以使 $c(L)=$ 最小.

注意 如果 $c(e)\equiv 1$，那末最经济道路问题就变成了最短路程问题.

为了解决最经济道路问题，先介绍一个最经济连结问题：

问题 2(最经济连结问题) 设有 m 个城市，要在它们之间建筑高速公路. 若任意两个城市 v_1 与 v_2 之间建造高速公路的造价为 $c[v_1, v_2]$. 问要把这 m 个城市连结起来，应如何设计高速公路，使得总造价最低？

把这个问题叙述成图论的语言就是：在每个边上，都有一个正数价格 $c(e)$ 的一个简单图中，选取一个生成树 T，使它的每条边的价格和[记成 $c(T)$]为最低. 这样的生成树称为最低价格生成树.

连通图的最低价格生成树的找法 设 $G=\langle V, E\rangle, n(V)=m$. 用数学归纳先找一个价格最小的边作为 e_1. 设边 $e_1, \cdots, e_{k-1}$ 已选好，现在给出一种选取 e_k 的方法如下：

选取 e_k，为使 $e_1, \cdots, e_{k-1}, e_k$ 中不包含任何环的价格最小的边把这步骤继续下去，最后得到 $e_1, \cdots, e_{m-1}$，它们组成 G 的一个最小价格生成树 T_0.

T_0 具最小价格的证明：假设最小价格生成树为 T，设 e_{k_0} 是 $e_1, \cdots, e_{m-1}$ 中第一条不属于 T 的边，那末把 e_{k_0} 加到 T 上去后，就得到一个初等环路 γ(第一节定理 3). γ 中必有一条不属于 T_0 的边 e. 把 T 中的 e 换成 e_{k_0} 后，则得到另一个生成树 T'(见图 5-17)，而且

$$c(T')+c(e)=c(T)+c(e_{k_0}).$$

由于 T 是最小价格生成树，所以 $c(T)\leqslant c(T')$，于是

$$c(e_{k_0})\geqslant c(e).$$

另一方面，$e_1, \cdots, e_{k_0-1}, e$ 都是 T' 的边，因此它们中不含任何环路. 由 T_0 的取法应取 e 为 e_{k_0}，故有

$$c(e_{k_0})=c(e).$$

这样 $c(T')=c(T)$，即 T' 也是最小价格生成树. 树 T' 与树 T_0 的第一个不同的边不妨设为 e_{k_0+1}.

应用与上面完全类似的方法，可得到 G 的另一个生成树 T''，它是最小价格生成树，而且与 T_0 的第一个不同的边是 e_{k_0+2}.

继续此步骤，最后就归纳到：T_0 是 G 的最小价格生成树.

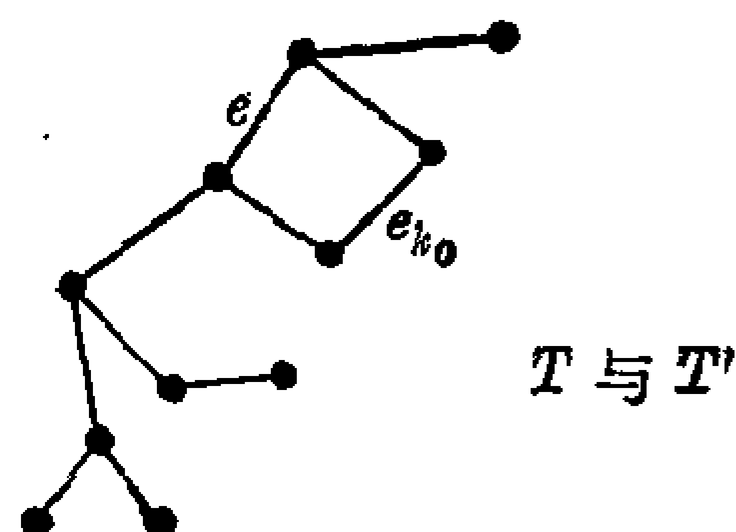


图 5-17

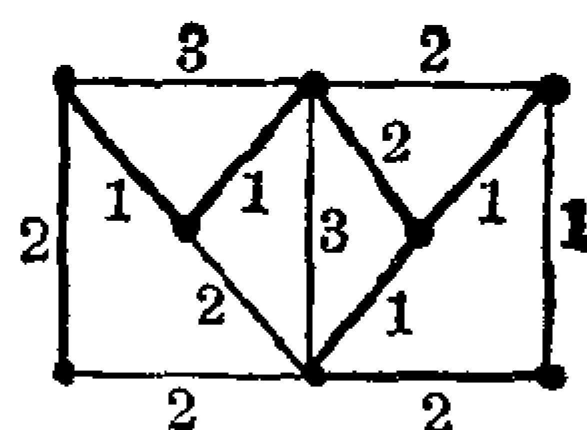


图 5-18

【例1】 在图5-18中，每条边旁边的数表示该边的价格. 粗线部分就是一个最小价格生成树，该树的价格为10.

最经济道路的找法 对于每个边 e 具有价格 $c(e)>0$ 的 m 个顶点的简单连通图 $G=\langle V, E\rangle$，用数学归纳法给出（并证明）从顶点 v_0 出发的最经济道路如下：

1° 找 v_1，使 $c[v_0, v_1]$ 尽量小. 于是边 $[v_0, v_1]$ 就是 v_0 至 v_1 的最经济道路，其价格记为 $l(v_0; v_1)$，那末

$$l(v_0;\ v_1)=c[v_0,\ v_1],$$

记 $\gamma_1=[v_0, v_1]$.

2° 在 $V-\{v_0, v_1\}$ 中，如果存在 u，使 $c[v_0, u]>0$，那末

就选取使 $c[v_0, u]$ 达到最小的 u 为 u_0. 同样, 如果存在 u, 使 $c[v_1, u]>0$, 那末就选取使 $c[v_1, u]$ 达到最小的 u 为 u_1.

由 G 的连通性, u_0、u_1 总有一个存在. 令 $c[v_0, v_0]=0$. 设

$$i_0=\begin{cases}0, \text{若仅 } u_0 \text{ 存在,或 } u_0\text{、}u_1 \text{ 同时存在,但} \\ \quad c[v_0, v_0]+c[v_0, u_0]\leqslant c[v_0, v_1]+c[v_1, u_1]; \\ 1, \text{若仅 } u_1 \text{ 存在,或 } u_0, u_1 \text{ 同时存在,但} \\ \quad c[v_0, v_1]+c[v_1, u_1]<c[v_0, v_0]+c[v_0, u_0].\end{cases}$$

取 $v_2=u_{i_0}$(直观地看就是: 从 γ_1 上每个顶点向外走价格尽量小的一步,并且在这些停步的顶点中,选取到 v_0 价格最小的那一个为 v_2). 于是 v_0, v_{i_0}, v_2 给出了一条从 v_0 到 v_2 的道路,记为 γ_2, 其价格为

$$c[v_0, v_{i_0}]+c[v_{i_0}, v_2].$$

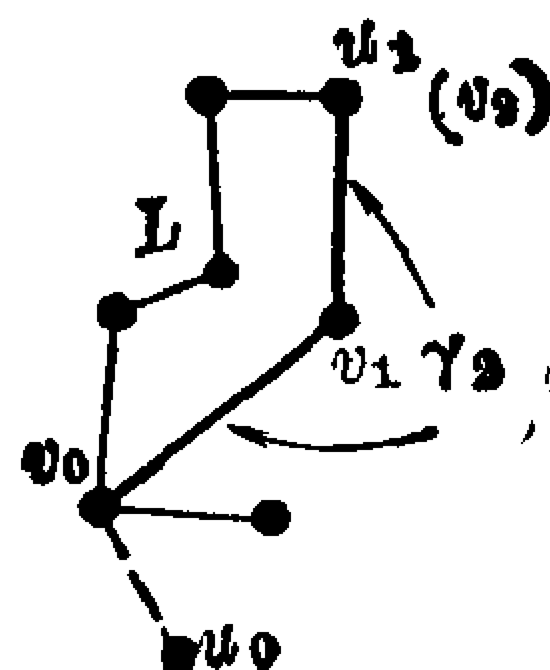


图 5-19

这 γ_2 就是 v_0 到 v_2 的最经济道路. 这是因为:若 $L(\neq\gamma_2)$ 是任一条由 v_0 至 v_2 的道路(参看图 5-19), 如果边 $[v_0, v_1]$ 不在 L 上,此时 u_0 必存在,于是 $c[v_0, u_0]\leqslant$ 道路 L 的价格 $c(L)$, 再由 $v_2(=u_{i_0})$ 的定义,可知

$$c[v_0, v_{i_0}]+c[v_{i_0}, v_2]\leqslant c[v_0, u_0]\leqslant c(L);$$

如果 $[v_0, v_1]$ 在 L 上,此时 u_1 必存在,于是

$$c[v_0, v_{i_0}]+c[v_{i_0}, v_2]\leqslant c[v_0, v_1]+c[v_1, u_1]\leqslant c(L).$$

因此恒有 v_0 到 v_2 的最经济价格

$$l(v_0; v_2)=c[v_0, v_{i_0}]+c[v_{i_0}, v_2],$$

....

如此继续选下去.

3° 设对 $k<n(V)$, $v_0, \cdots, v_{k-1}$ 已选好, 而且分别选出了

从 v_0 到 $v_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$ 的最经济道路 γ_i，其价格为 $l(v_0;v_i)$。下面给出选取 v_k 及选取 v_0 到 v_k 的最经济道路的办法：先在 $v_0,\cdots,v_{k-1}$ 外找与 $v_i(0\leqslant i\leqslant k-1)$ 价格最小的连边，设其另一端为 u_i(由 G 连通至少有一个 i，使这样的 u_i 存在)。设全部已选出的是 $u_{k_1},\cdots,u_{k_l}$。如果

$$l(v_0;\ v_{k_1})+c[v_{k_1},\ u_{k_1}],\ \cdots,\ l(v_0;v_{k_l})+c[v_{k_l},\ u_{k_l}]$$

这几个数中的最小值在 k_j 处达到，就令

$$v_k=u_{k_j}.$$

现在证明由 $v_0,\ v_1,\ \cdots,\ v_{k_j},\ v_k$ 连成的道路 γ_k 就是 v_0 到 v_k 的最经济道路 (见图 5-20)：假定 $L(\neq\gamma_k)$ 是任一条由 v_0 到 v_k 的道路，L 上最后一个在集合 $\{v_{k_1},\ \cdots,\ v_{k_l}\}$ 中的顶点记为 v_{k_s}，那末对 L 上后继于 v_{k_s} 的顶点 u' 有

$$\begin{aligned}c(\gamma_k)&=l(v_0;\ v_{k_j})+c[v_{k_j},\ v_k]\\&=l(v_0;v_{k_j})+c[v_{k_j},\ u_{k_j}]\\&\leqslant l(v_0;\ v_{k_s})+c[v_{k_s},\ u_{k_s}]\\&\leqslant c(v_0\text{ 沿 }L\text{ 到 }v_{k_s})+c[v_{k_s},\ u']\leqslant c(L).\end{aligned}$$

因此 $v_0,\ \cdots,\ v_{k_j},\ v_k$ 是最经济道路，且

$$l(v_0;\ v_k)=l(v_0;\ v_{k_j})+c[v_{k_j},\ v_k].$$

这手续可继续到最后一个顶点 $v_{m-1}(m=n(V))$，结果得到了由 v_0 到所有点共 $m-1$ 条最经济道路.

上述手续非常适合于在计算机上进行.

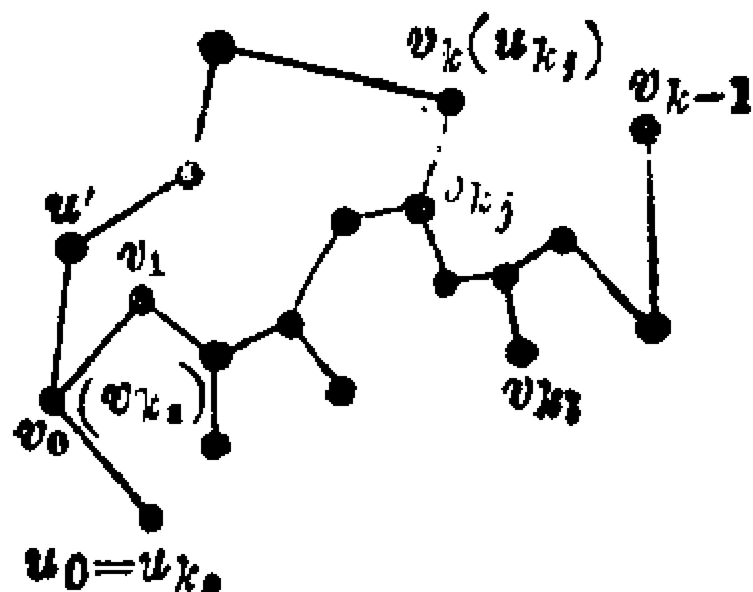


图 5-20

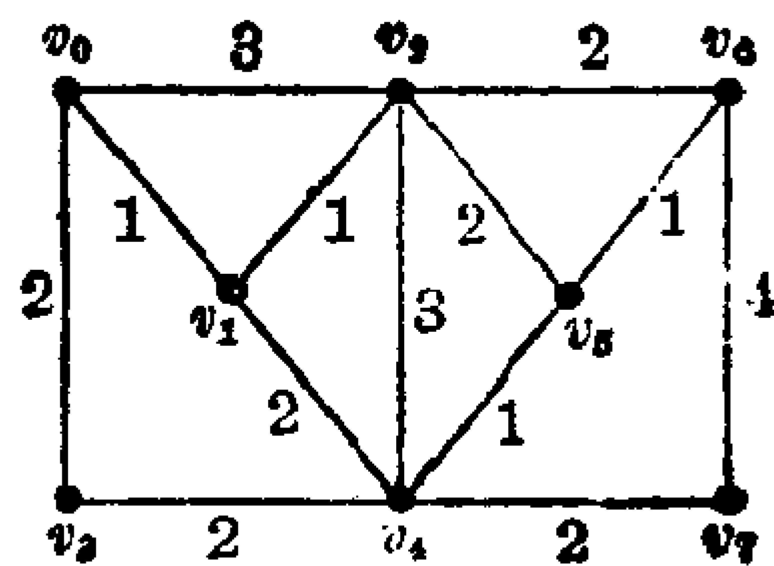


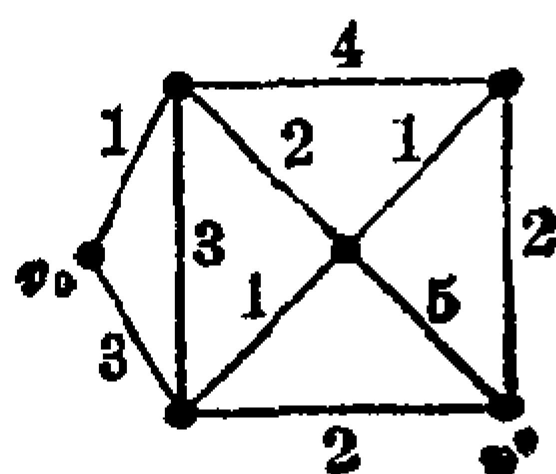
图 5-21

【例 2】 如图 5-21 所示，由 v_0 出发，按上述手续得到的 v_1，…，v_7 依此标在图上.

【特例】 如果令一切 $c(e)=1$. 则得到的最经济道路就是长度最短的道路.

习 题 5·3(3)

1. 若连通图 G 中每条边的价格彼此都不同. 求证 G 中只有一个最小价格生成树.
2. (1) 求下图的最小价格生成树;
   (2) 求从 v_0 到 v^* 的最经济道路.



3.4 单向流向平衡图

定义 1 令简单单向流向图 $G=\langle V, E\rangle$ 的顶点为 v_1，…，v_m，记

$$c_{ij}=\begin{cases} c[\overrightarrow{v_iv_j}], & \text{若有定向边}[\overrightarrow{v_i, v_j}];\\ 0, & \text{若 } v_i, v_j \text{ 间有定向边}[\overrightarrow{v_j, v_i}]\text{或无边}. \end{cases}$$

其中 $c[\overrightarrow{v_i, v_j}]$ 是沿定向边 $[\overrightarrow{v_i, v_j}]$ 的流量 ($i\neq j$, 且 $0\leqslant i, j\leqslant m$)，如果满足

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} c_{ij}=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} c_{ji}, \tag{3.3}$$

则称 G 为流向平衡图.

条件 (3.3) 称为流量平衡条件. 意即流进顶点 v_j 的“流量”等于从顶点 v_j 流出的“流量”.

定义 2 把简单单向流向图 $G=\langle V, E\rangle$ 的每两个顶点之间的定向边看为同一对顶点沿原来定向的某几条定向边，其中沿每条定向边上流量的和等于原来定向边上的流量，这样得到的一个多重定向图 G' 称为与 G 等价的多重流向图。

图 5-22 中的 G' 与 G 就是等价的.

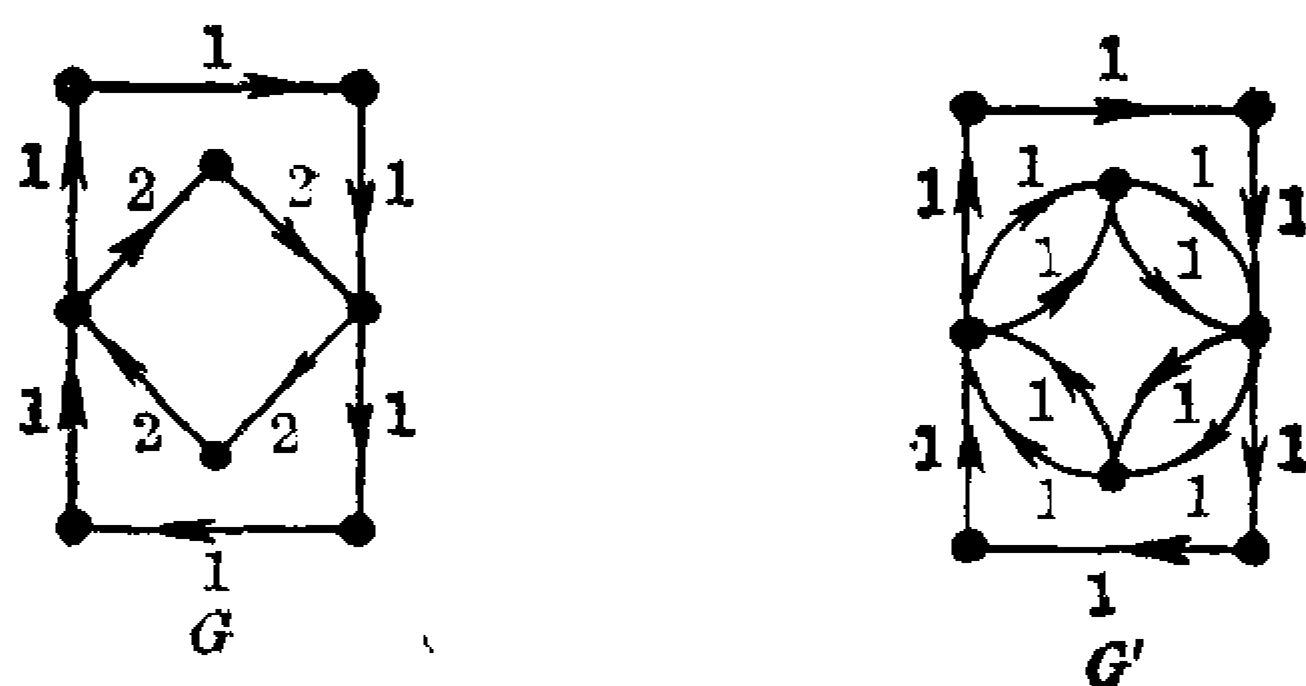


图 5-22

定义 3 在单向流向图的一个单定向环路上，如果每个定向边的流量都一样，则称这个单定向环路为一个环流；对应的流量称为在这个环流上的流量.

定理 1(环流定理) 一个简单的单向流向平衡图 G 等价于一个多重的单向流向图 G'. 这个 G' 的全体边集可以分成若干个环流.

【证】 不妨设 G 是弱连通的. 否则，可以对各个弱连通分量分别证明. 因为 c_{ij} 不能全为 0，所以至少有一个 $c_{j_0j_1}>0$. 由平衡条件(3.3)可知：必有 j_2 使 $c_{j_1j_2}>0$. 但 G 是单向图，所以 $j_2\neq j_0$. 同理，从 $c_{j_1j_2}>0$ 出发，又可以找到 j_3，使 $j_3\neq j_1$，且 $c_{j_2j_3}>0$. 如此继续进行下去，可以得到一系列 $j_0, j_1, j_2, \cdots$. 它们都在 1 与 m 之间取值. 所以总存在第一个重复出现的数 j_k. 若 $j_k=j_{k_0}(k>k_0)$ 那末 $k>k_0+2$. 令 $l=k-k_0(>2)$，并记

$$i_1=j_{k_0},\ i_2=j_{k_0+1},\ \cdots,\ i_{l+1}=j_k=j_{k_0}=i_1.$$

故有 $i_1, \cdots, i_l$ 两两不同，而且

$$c_{i_1i_2}, \cdots, c_{i_{l-1}i_l}, c_{i_li_1}>0.$$

再令
$$\alpha_1=\min_{1\leqslant k\leqslant l} c_{i_ki_{k+1}}.$$

于是可以在顶点 $i_1, i_2, \cdots, i_l, i_1$ 之间给以一个环流量为 α_1 的环流.

令

$$c_{ij}^{(1)}=\begin{cases} c_{ij}-\alpha_1, & \text{当}(i, j)=(i_k, i_{k+1}), (k=1, \cdots, l); \\ c_{ij}, & \text{其它}(i, j). \end{cases}$$

于是 $c_{ij}^{(1)}\geqslant 0$ 仍满足平衡条件(3.3)而且 $c_{ij}^{(1)}(1\leqslant i, j\leqslant m)$ 中不等于 0 的个数至少比 $c_{ij}(1\leqslant i, j\leqslant m)$ 中不等于 0 的个数少 1.

以 $c_{ij}^{(1)}$ 代替 c_{ij}，重复上面的步骤，可以得到在另一些顶点(例如 $i'_1, \cdots, i'_p, i'_1$)上的一个环流量为 α_2 的环流，这里

$$\alpha_2=\min_{1\leqslant k\leqslant p} c^{(1)}_{i'_ki'_{k+1}} \quad (i'_{p+1}=i'_1).$$

再令

$$c_{ij}^{(2)}=\begin{cases} c_{ij}^{(1)}-\alpha_2, & \text{当}(i, j)=(i'_k, i'_{k+1}), (k=1, \cdots, p); \\ c_{ij}^{(1)}, & \text{其它}(i, j). \end{cases}$$

则 $c_{ij}^{(2)}(1\leqslant i, j\leqslant m)$ 中不等于 0 的个数至少又少了一个，而且仍有 $c_{ij}^{(2)}\geqslant 0$ 及平衡条件(3.3).

如此继续这样的步骤，经过有限次重复后，最后就得到某个 N，使 $c_{ij}^{(N)}\equiv 0$(一切 $1\leqslant i, j\leqslant m$).

于是 G 等价于 $N-1$ 个流量分别为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{N-1}$ 的环流. 这就证明了本定理.]

第四节　平　面　图

设有三个工厂 a、b、c，由供水站 d、供油站 e、供电站 f

通过地下管道供给水、油和电. 问能不能使铺设的地下管道之间不发生交叉?

把 a、b、c、d、e、f 作为顶点，地下管道作为边，就得到一个图(如图 5-23(2)). 这是一个完全二分图 $K_{3,3}$.

能不能把一个图在平面上画出来，而且要它满足：任何两条边的交点只许是顶点？满足这一要求的图称为平面图. 所以上面提出的问题实际上就是问 $K_{3,3}$ 是不是平面图(图 5-23(1))?

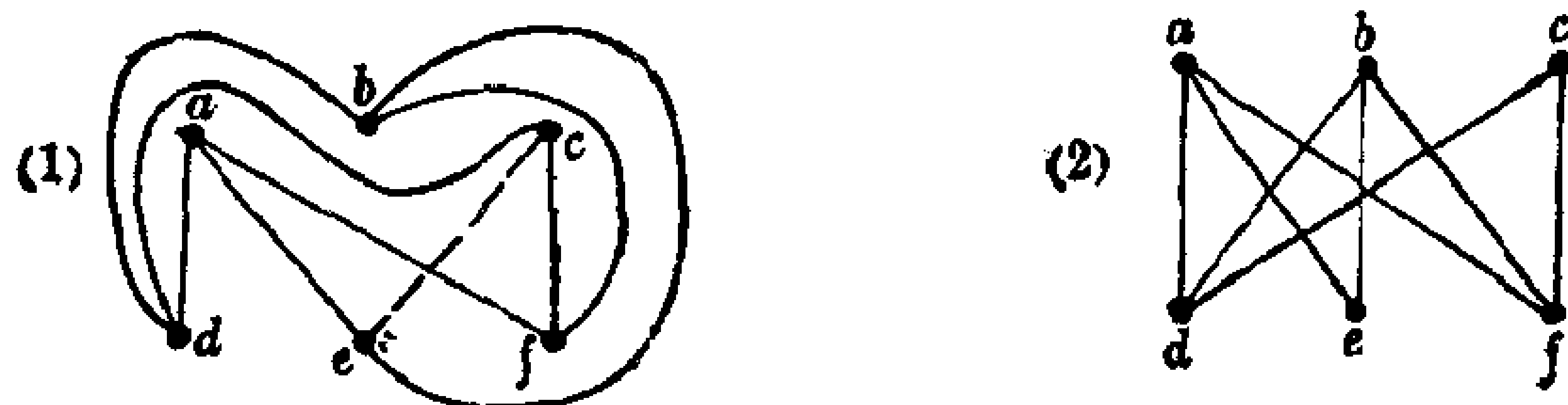


图 5-23

定义 1 如果能把图 $G=\langle V, E\rangle$ 在平面上画出来，而且除在顶点外，任何两边不许有交点，则称 G 为平面图(但边不必一定画成直线，也可画成曲线).

图 $K_{3,3}$ 事实上不是平面图，后面将证明这一点. 当然，在空间给出 $K_{3,3}$ 的使任何两边不能相交的图形是很容易的. 例如图 5-24. 此外，在其它曲面上，例如在环面上，给出 $K_{3,3}$ 的使任何两边不能相交的图形也是能够办到的，如图 5-25.

【例 1】 在图 5-26(1)中的图 G 是平面图，因为它可以

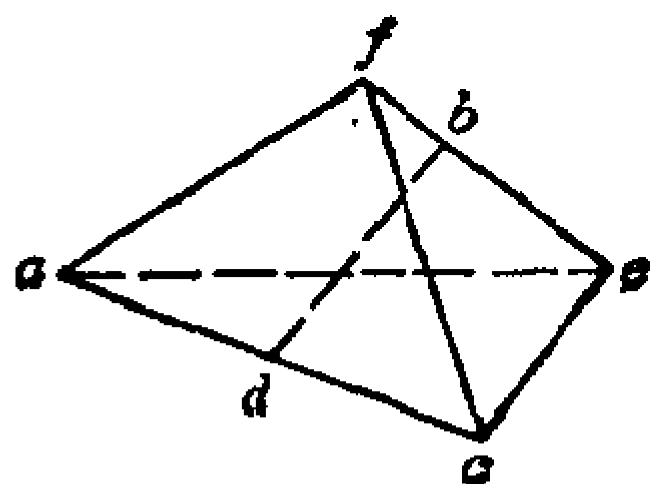


图 5-24

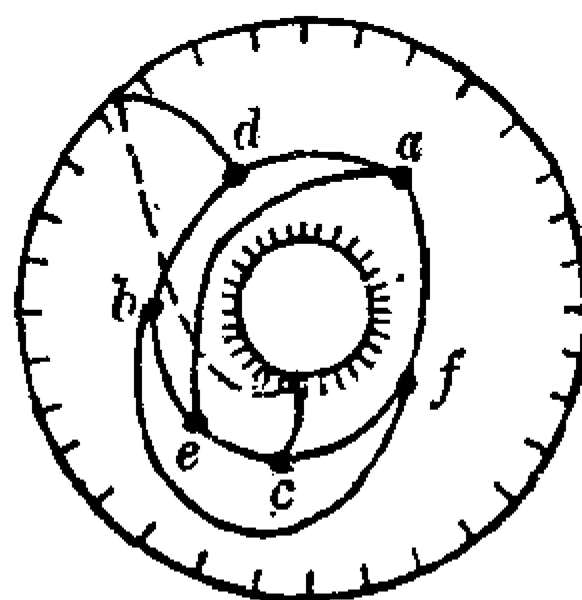


图 5-25

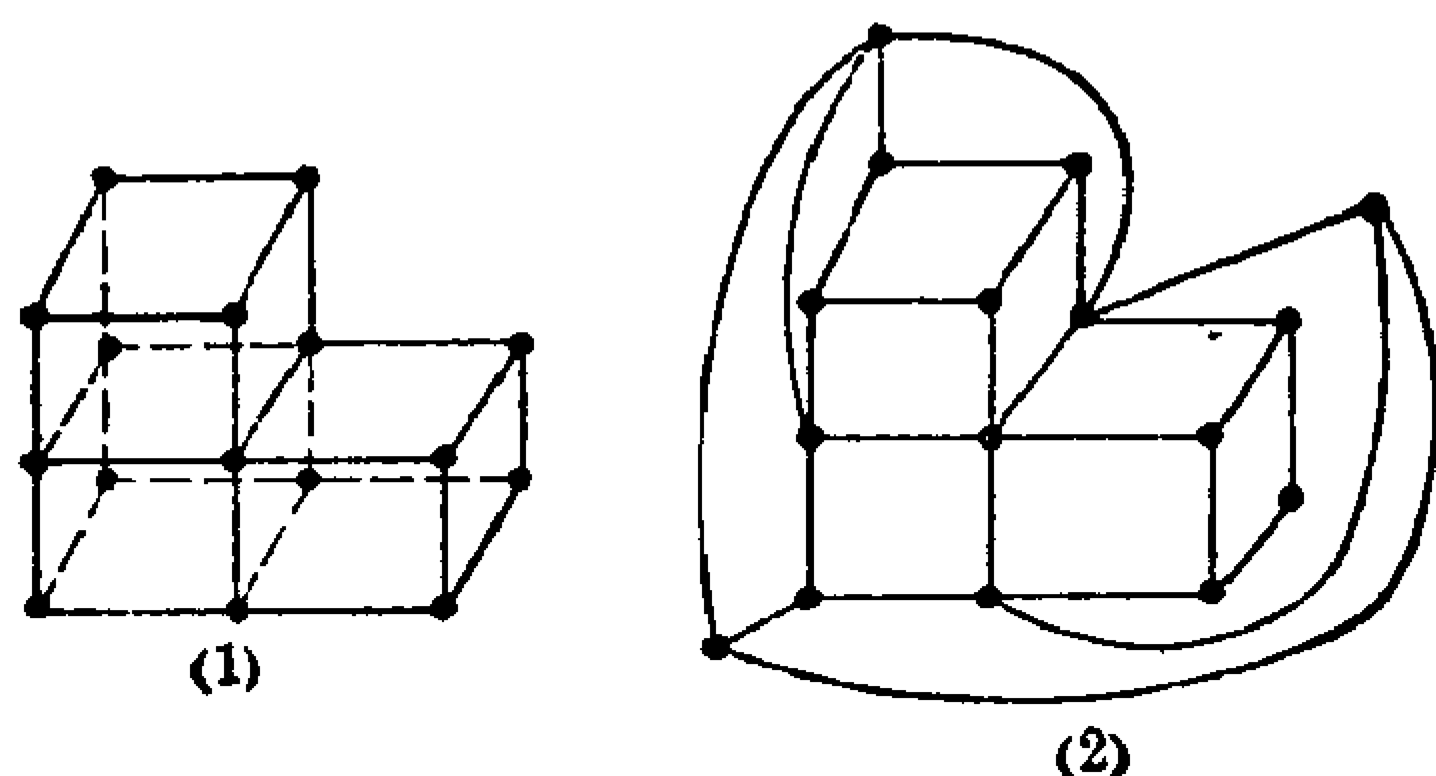


图 5-26

在平面上画成(2)中的样子.

【例 2】(地图着色图) 考虑某一大洲地图, 把每个国家看成一个顶点,两国之间若有公共边界,就在表示这两国的顶点之间联一条边. 这样的图是一个平面图.

在大规模集成电路的设计中,平面图的概念是有用的,因为如果一个接线图是平面图就显得比较简单.

定义 2 如果能把图 $G=\langle V, E\rangle$ 在球面上画出来, 而且除在顶点外,任何两边不许有交点,则称 G 为球面图.

定理 1 G 是平面图,则 G 是球面图,反之也对.

【证】 若 G 是平面图, 设它已画在平面上. 在这平面上放一个球,设过球与平面的切点 N 的直径交球于另一点为 S. 平面上 N 外任意一点 P 与 S 的联线与球面交于唯一的一点 P', 点 N 在球面上对应于它自己, 这样一个平面上的图 G 就对应于一个球面上的图 G'. 所以 G 可以在球面上画出,即 G 是球面图(见图 5-27).

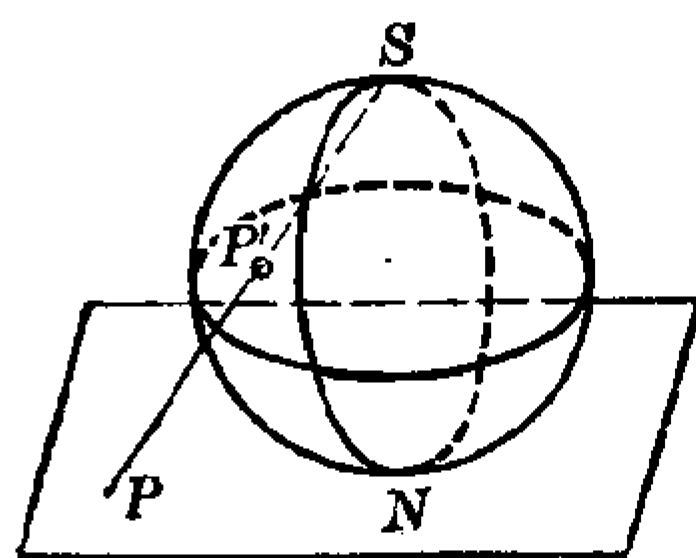


图 5-27

反之, 若 G 为球面上的图, 在球面上取不在图 G 上的一点作为 S, 把过 S 的直径与球面的交点记为 N, 过 N 作此球的切平面, 在 S 处放一个点光源, 这个光源把球面图 G 投影

到平面上，就得到一个平面图 G'. 这说明 G 可以在平面上画出来，而且任意两边不能有除顶点外的交点. 因而 G 是平面图. 】

注 上面介绍的把球面上的点投射为平面上的点的办法称为球极投影法. 有一种以北极为中心的地图就是这样绘制的.

利用这个定理也可以判断出例 1 中的图 G 是平面图. 这是因为该图显然可画成如图 5-28 中 G' 的样子. 把 G' 捏成球形，就知道 G' 是球面图，因而 G 是球面图. 由定理 1 可知 G 是平面图.

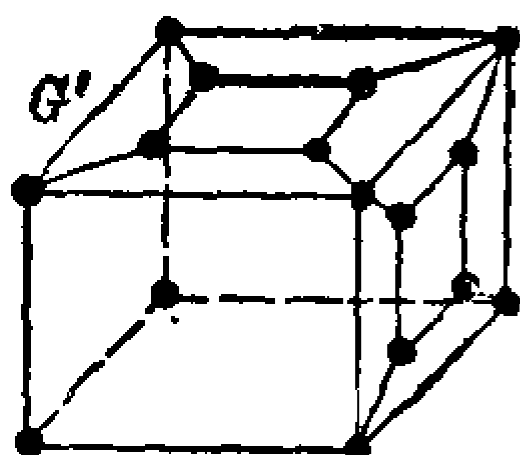


图 5-28

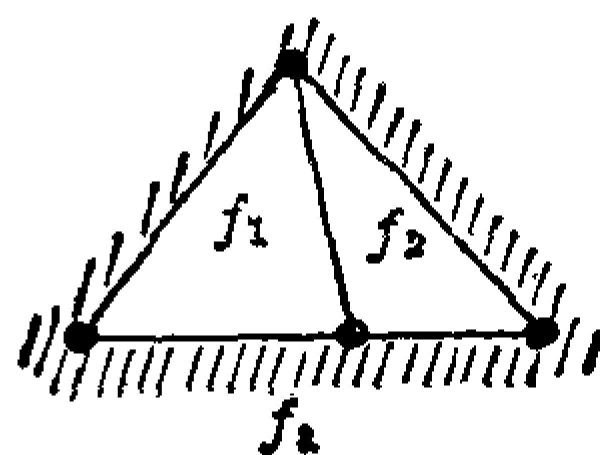


图 5-29

定义 3 设 G 是平面图，且已画在平面上. 由它的一些边围成的区域 f 如果满足：f 中的任意两点都可以用不通过 G 的任何边或顶点的曲线连结起来，则称区域 f 为图 G 的一个面；两个有公共边的面称为相邻的；一个面的所有边称为这个面的边界；构成边界的边称为这个面的边.

注意 每个平面图有且只有一个无界的面：它是一切有界面的并关于平面的补集. 例如在图 5-29 中，有三个面 f_1, f_2, f_3, 其中 f_3 为阴影部分，它就是一个无界的面.

但是同一个图也可以有不同的画法，例如

【例 3】 图 5-30 中的 G 与 G' 实际上是一样的，但是，无界面的位置却不同. 在 G 中，f_4 是无界面，但在 G' 中变成了有界面；在 G 中的有界面 f_1, 在 G' 中变成了无界面.

【例 4】 图 5-31 中的 G_1 只有一个面，是无界面；G_2 有

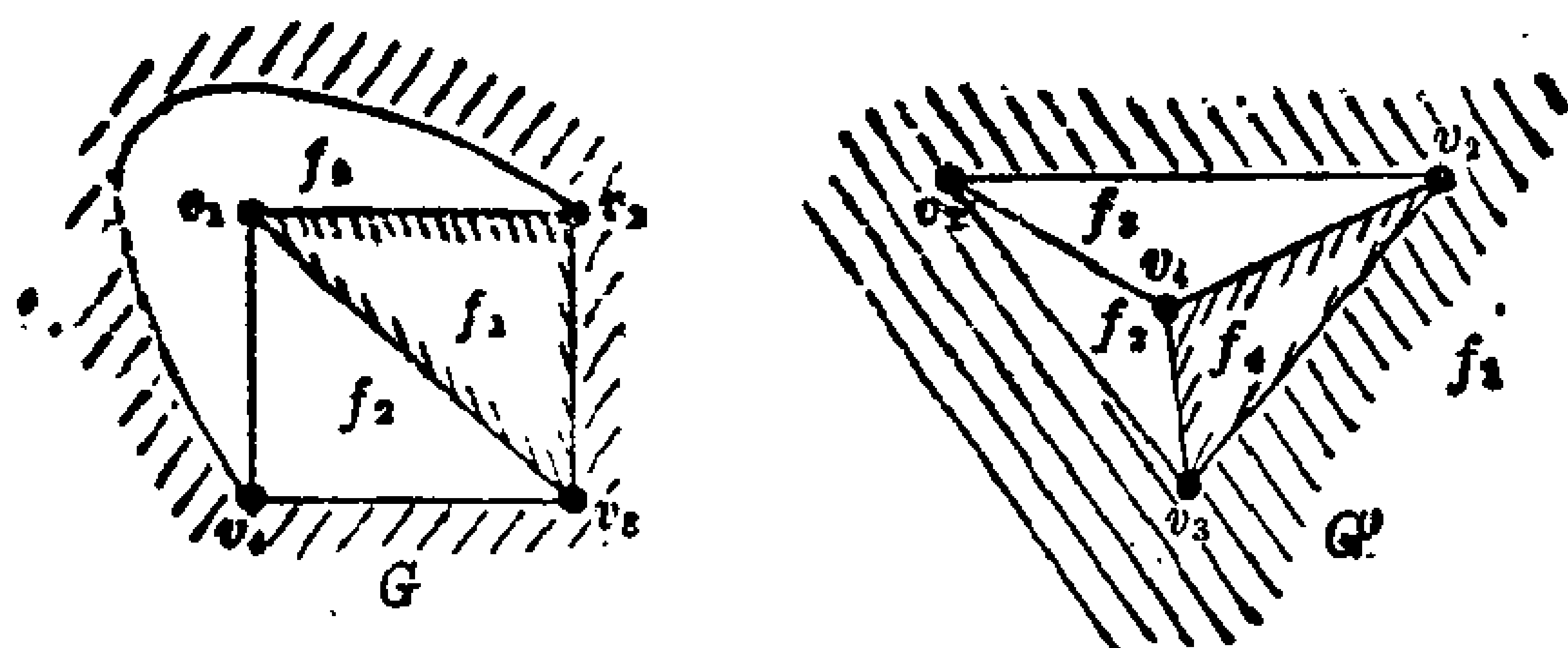


图 5-30

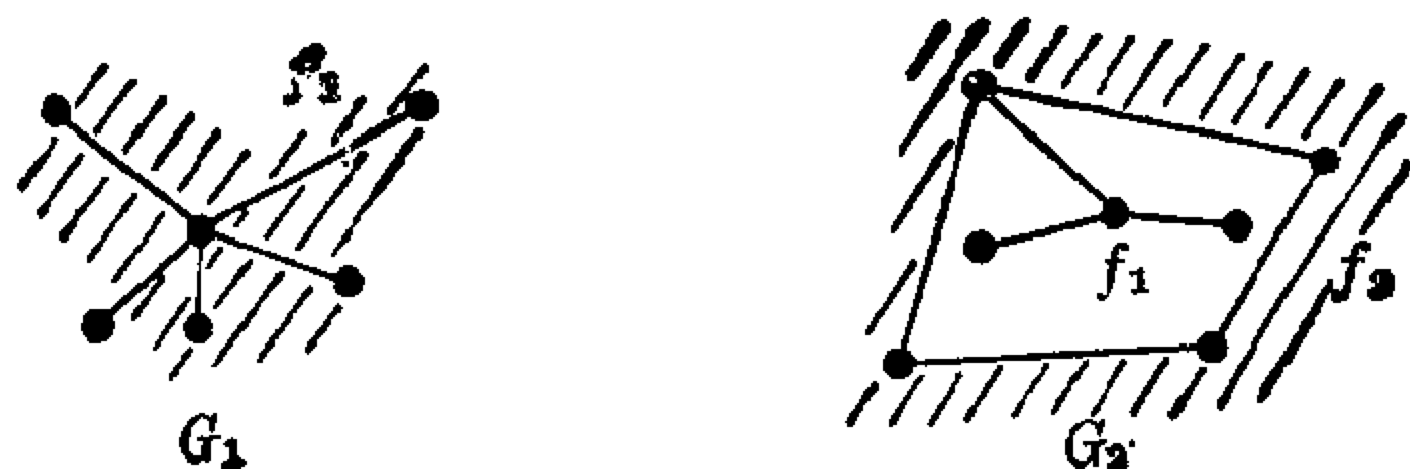


图 5-31

两个面.

定义 4 所有的边都是直线的平面图称为直线图.

法雷(Fary)在 1948 年证明了*): 一个简单平面图总可以画成一个直线图.

定理 2(欧拉公式) 设 $G=\langle V, E\rangle$ 是 p 个连通部分的平面图, 它的全体面(包括无界面)组成一个集合 F, 则有公式

$$n(V)-n(E)+n(F)=p+1. \tag{4.1}$$

式中左边的数称为图的欧拉数.

【证】 1° 先设 $p=1$, 这时 G 为连通图. 若在 G 中去掉一条边, 那末得到的部分图 G' 比 G 少一条边且少一个面, 但顶点数目不变, 因此

$$G' \text{的顶点数}-\text{边数}+\text{面数}=n(V)-n(E)+n(F).$$

G 可以去掉有限条边后, 得到一个生成树 T, 因此

*) Acta Sci. Math., 11, 229-33 (1948).

$$T \text{ 的顶点数}-\text{边数}+\text{面数}=n(V)-n(E)+n(F).$$

但是 T 的顶点数为 $n(V)$，边数为 $n(V)-1$，面数为 1，所以

$$T \text{ 的顶点数}-\text{边数}+\text{面数}=n(V)-(n(V)-1)+1=2.$$

因此

$$n(V)-n(E)+n(F)=2.$$

这说明 $p=1$ 时，公式(4.1)是对的.

2° 一般地，$p>1$ 时:

设 G 的 p 个连通部分为 $\langle V_1, E_1\rangle, \cdots, \langle V_p, E_p\rangle$，它们的有界面数分别为 $r_1, r_2, \cdots, r_p$. 那末根据 1° 证明的结果，有

$$n(V_i)-n(E_i)+r_i=1 \quad (i=1, 2, \cdots, p),$$

(注意上式两边没有计入无界面)，对 i 求和，得到

$$n(V)-n(E)+\sum_{i=1}^{p} r_i=p.$$

但是，G 的全部有界面加上无界面就是 $n(F)$，

$$\sum_{i=1}^{p} r_i+1=n(F).$$

因此 $$n(V)-n(E)+n(F)=p+1.$$

定理证毕. 】

推论 1 连通简单平面图 $G=\langle V, E\rangle$，若 $n(E)>2$，则必有不等式

$$\frac{3}{2} n(F) \leqslant n(E) \leqslant 3n(V)-6, \tag{4.2}$$

其中 $n(F)$ 表示 G 的面数.

【证】 因为 G 是简单图，所以每个面(包括无界面)都至少有三个边，于是全部面的边至少有 $3n(F)$ 个. 但每个边又是某两个面的公共边，所以对每个固定的边在计算全部面的边数时，重复算了两次(每个以它为公共边的面都计算它一

次)，因此

$$2n(E)=\text{全部面的边的和}\geqslant 3n(F),$$

从而

$$\frac{3}{2}n(F)\leqslant n(E). \tag{4.3}$$

再由欧拉公式(4.1)，得

$$n(E)-n(V)+2=n(F)\leqslant\frac{2}{3}n(E),$$

所以 $$\frac{1}{3}n(E)\leqslant n(V)-2,$$

即

$$n(E)\leqslant 3n(V)-6. \tag{4.4}$$

由(4.3)及(4.4)即得(4.2). ▌

推论 2 5 个顶点的完全图 K_5 不是平面图.

【证】 对 K_5 (如图 5-32) $=\langle V, E\rangle$ 来说，$n(V)=5$,

$$n(E)=\frac{n(V)(n(V)-1)}{2}=10$$

不满足 $n(E)\leqslant 3n(V)-6$. 但 K_5 是简单图，故由推论 1 可知：K_5 不是平面图. ▌

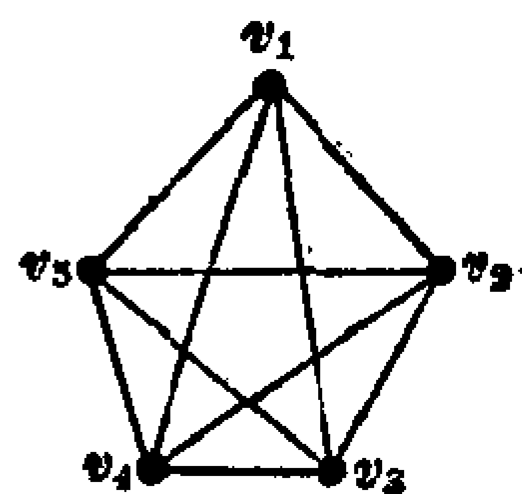


图 5-32

推论 3 完全二分图 $K_{3,3}$ 不是平面图.

【证】 用反证法：假设 $K_{3,3}$ 是平面图. 由于 $K_{3,3}$ 是二分图，所以任意三个顶点之间不可能都存在边，因而 $K_{3,3}$ 的每个面至少得有四个边. 但是每一条边都是某两个面的公边，所以在计算全体面的边中重复计算它一次，于是

$$2n(E)=\text{全部面的边之和}\geqslant 4n(F),$$

即 $$n(E)\geqslant 2n(F).$$

再由欧拉公式

$$n(F)=2+n(E)-n(V)$$

可推出 $$n(E)\geqslant 4+2n(E)-2n(V),$$
即
$$n(E)\leqslant 2n(V)-4, \tag{4.5}$$
但 $K_{3,3}=\langle V, E\rangle$ 中, $n(V)=6$, $n(E)=3\times 3=9$, 故 (4.5) 并不满足, 这就导致了矛盾. 说明"$K_{3,3}$ 是平面图"不成立. ▌

注 与 $K_{3,3}$ 类似,也可将 K_5 画在环面上(如图 5-33).

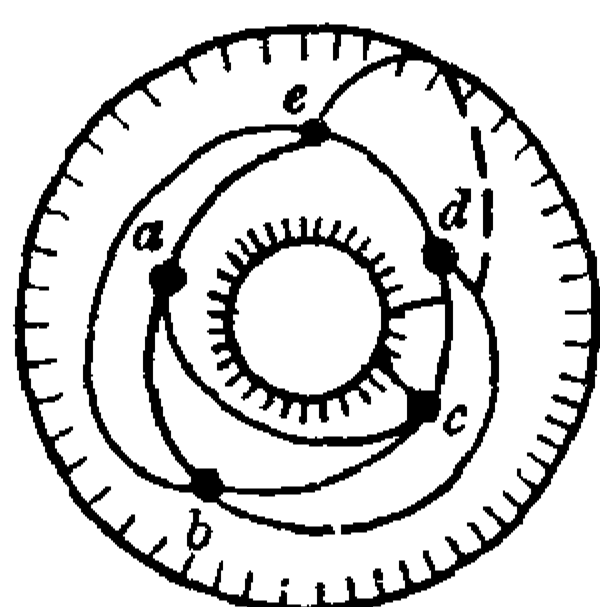


图 5-33

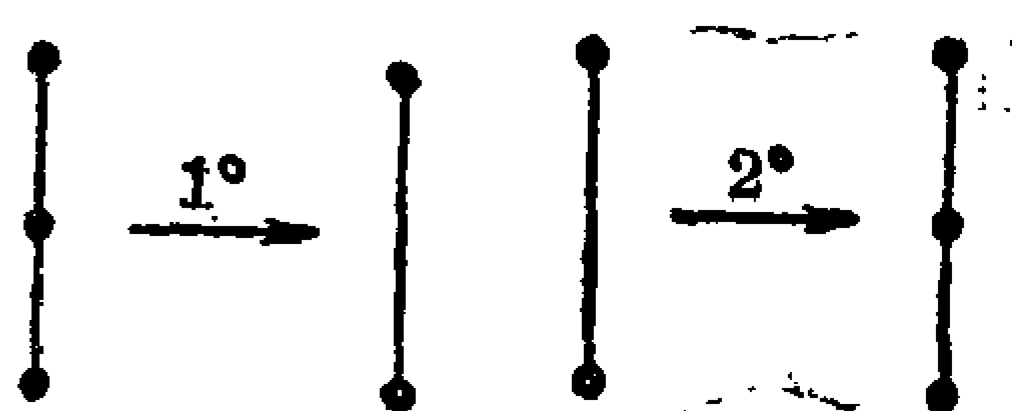


图 5-34

定义 5 对于一个图 G, 可以施行两种手续:

1° 去掉一个结合度为 2 的顶点,并把从该点出发的两条边接成一条边;

2° 在某条边上加入一个新的顶点,并把这条边看成由这个新顶点出发的两条边(见图 5-34).

对 G 施行有限次这样的手续后, 得到的一个图 G' 叫做 G 的一个形变.

如果某个图 G_1 是图 G 的形变,则称 G 与 G_1 同胚.

判别一个图是不是平面图, 有一个著名的

库拉托夫斯基定理 一个图是平面图的充要条件是: 它不含一个同胚于 K_5 或 $K_{3,3}$ 的部分子图.

(这条件的必要性是显然的, 充分性证明较复杂, 本节不作介绍.)

平面图还有一个著名的

“四色定理” 平面图的着色数$\leqslant 4$.

这一直是一个非常难于证明的猜测，直到1976年，在计算机帮助下才得到了证明.

习　题　5·4

1. 求证满足下列条件之一的图 $G=\langle V, E\rangle$ 是平面图:

 (1) $n(V)\leqslant 4$;

 (2) $n(V)=5, n(E)\leqslant 9$;

 (3) $n(V)=6, n(E)\leqslant 8$;

2. 求证简单平面图 G 中必存在一个结合度小于 6 的顶点. [提示: 用推论 1.]

3. 求证完全图 K_n 当且仅当 $n\leqslant 4$ 时,是平面图.

4. 求证完全二分图 $K_{n,m}$ 当且仅当 $n\leqslant 2$ 或者 $m\leqslant 2$ 时,是平面图.

5. 求证图 5-35 不是平面图.

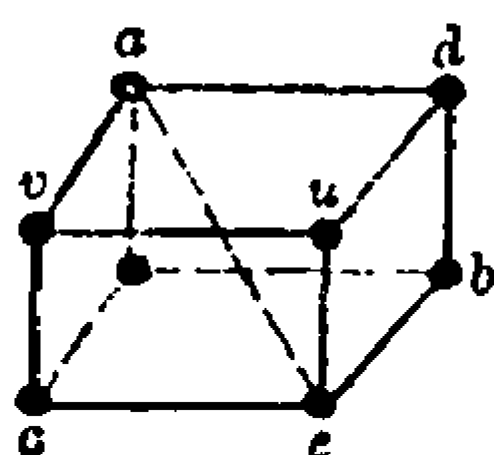


图　5-35

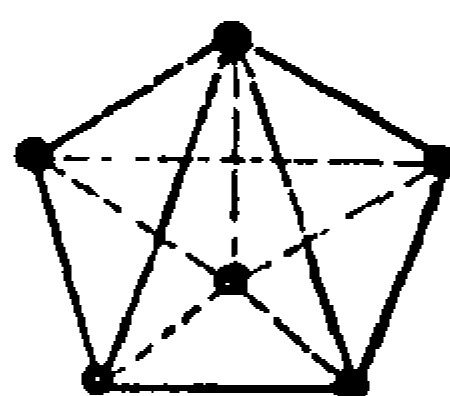


图　5-36

6. 若 G 是有 11 个顶点的简单连通图,求证 G 或 G 的补图 G^* 中总有一个不是平面图. 试把这个结论推广到顶点多于 11 个的情况.

7. 求证图 5-36 不是平面图.

8. 设空间一个凸多面体的顶点数为 m, 边数为 e, 面数为 f. 证明

$$m-e+f=2.$$

9. 试画一个有 5 个顶点、9 条边的直线图.

第五节　定向图的结合矩阵

定义 1　设 $G=\langle V, E\rangle$ 为 m 阶(多重)定向图. 作一个

m 行 m 列的表格，它在第 i 行第 j 列($1\leqslant i,\ j\leqslant m$)处的元素 a_{ij} 为：

$$a_{ij}=\text{从 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 的定向边的数目}$$

(当 $i=j$ 时，定向边变为定向圈)，

这个表格称为 G 的**结合矩阵**，记为 A_G.

显然，一个定向图由它的结合矩阵完全确定.

若 G 是多重图(即无定向的)，则当把它看成双定向图后，得到的结合矩阵也称为 G 的结合矩阵. 这时候总有

$$a_{ij}=a_{ij}\quad(1\leqslant i,\ j\leqslant m).$$

这样的结合矩阵称为**对称的**.

如果 G 是简单定向图，那末 a_{ij} 只能取 0 或 1，而且 A_G 的对角线上的元素 $a_{ii}=0(1\leqslant i\leqslant m)$. 若在 $V=\{v_1,\ \cdots,\ v_m\}$ 上定义一个关系 $\boldsymbol{R}$：对 u、$v\in V$，$u\boldsymbol{R}v$ 当且仅当 u 到 v 有定向边. 那末关系 $\boldsymbol{R}$ 的结合矩阵(见第三章)也就是 A_G.

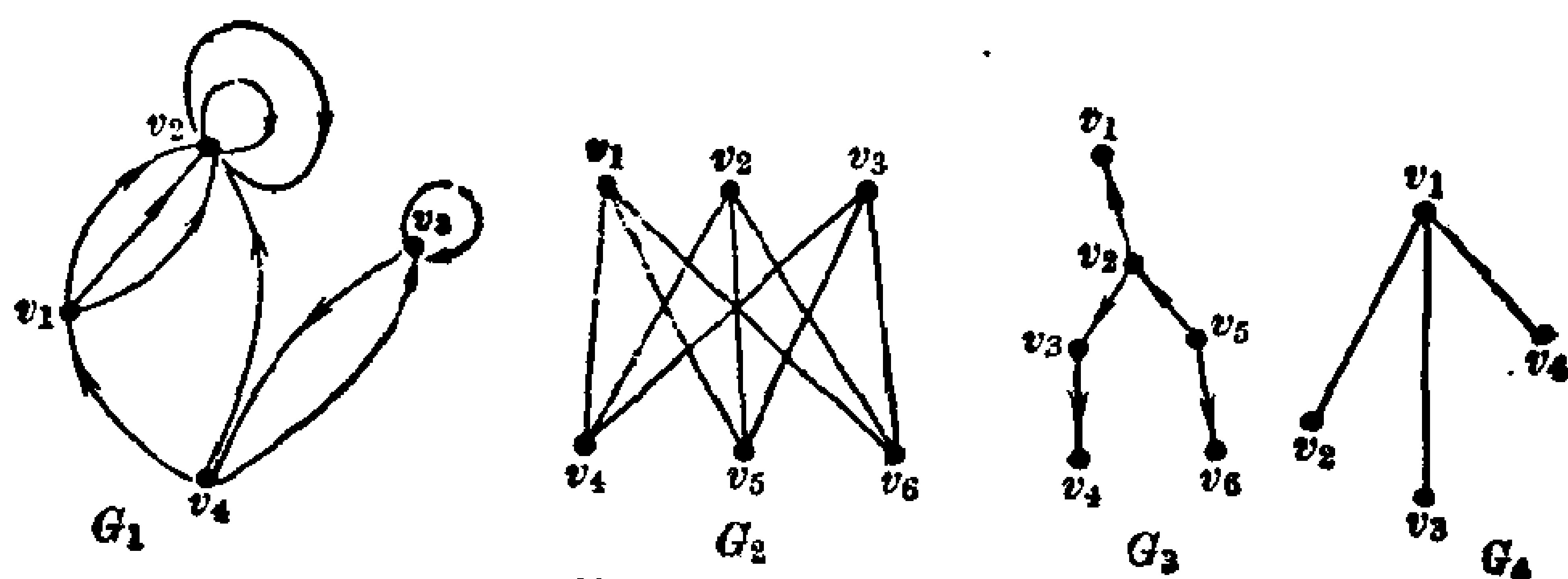


图 5-37

【例 1】 在图 5-37 中，G_1 至 G_4 的结合矩阵分别为

$$A_{G_1}=\begin{pmatrix}0&3&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&1\\1&1&1&0\end{pmatrix},$$

$$A_{G_2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{G_3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{G_4}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $\mathbf{1}_m$、O_m 分别为 m 行 m 列且元素全为 1、0 的矩阵

$$\mathbf{1}_m=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad O_m=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

那末 m 阶完全图 K_m 的结合矩阵为 $\mathbf{1}_m-I_m$（即 $A_{K_m}=\mathbf{1}_m-I_m$），其中 I_m 为 m 阶单位阵：

$$I_m=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(矩阵 A, B 的加、减、乘法及方幂 $A^2=AA$、$A^n=AA^{n-1}=A^{n-1}A$ 等,在此仍适用.)

定义 2 如果在定向图 G 中, 从顶点 u 到 v 有一条长度为 k 的定向道路,则称 v k 步邻接于 u. 并称该条定向道路为由 u 经 k 步到达 v 的定向道路.

定理 1 设定向图 G 的顶点集为 $V=\{v_1, \cdots, v_m\}$, 其结合矩阵为 A, 那末由顶点 v_i 经 n 步到达顶点 v_j 的定向道路的数目恰为 A^n 中第 i 行第 j 列的元素.

【证】 设

$$A^n=\begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & \cdots & a_{1m}^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^{(n)} & \cdots & a_{mm}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

先看 $n=2$ 的情形. 这时

$$a_{ij}^{(2)}=a_{i1}a_{1j}+a_{i2}a_{2j}+\cdots+a_{im}a_{mj}.$$

对于 $1\leqslant k\leqslant m$, a_{ik} 表示由 i 经一步到 k 的定向边的数目; a_{kj} 表示由 k 经一步到 j 的定向边的数目. 所以它们的乘积 $a_{ik}a_{kj}$ 表示从 i 中间经过 k, 共 2 步到 j 的定向道路的数目. 因此, $a_{ij}^{(2)}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}a_{kj}$ 表示从 i 出发经 2 步后到达 j 的定向道路的数目.

对于一般 n, 可以用数学归纳法证明本定理. 作为练习, 留给读者自证. ▌

对于矩阵 $B=(b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$, 记

$$\operatorname{tr} B=b_{11}+\cdots+b_{mm},$$

即是矩阵 B 的对角线元素的和. 从而有:

推论 1 若定向图 G 的顶点为 $v_1, \cdots, v_m$, 结合矩阵为 A, 那末 G 中长度为 n 的定向环路的数目为 $\operatorname{tr} A^n$.

令 $$A'=(a'_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m}, \quad a'_{ij}=a_{ji},$$

$$A_D=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

推论 2 设定向图 G 的顶点为 $v_1, \cdots, v_m$，结合矩阵为 A，那末从 v_i 到 v_j 长度为 n 的半道路的数目为矩阵 $(A+A'-A_D)^n$ 中第 i 行第 j 列的元素，长度为 n 的环形半道路数目为 $\mathrm{tr}(A+A'-A_D)^n$.

【证】 把从 v_i 到 v_j 的长度为 1 的定向半道路数记为 b_{ij}，那末

$$b_{ij}=\begin{cases} a_{ij}+a_{ji}, & \text{当 } i\neq j \text{ 时;} \\ a_{ii}, & \text{当 } i=j \text{ 时.} \end{cases}$$

于是 $$(b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m}=A+A'-A_D.$$

其它证明都与定理 1 完全相仿. ▌

推论 3 设定向图 G 的顶点为 $v_1, \cdots, v_m$，结合矩阵为 A，

(1) 记矩阵 $A+A^2+\cdots+A^{m-1}$ 中第 i 行第 j 列的元素为 $(A+A^2+\cdots+A^{m-1})_{ij}$，那末对 $i\neq j$，v_i 可到 v_j 的充要条件为 $(A+A^2+\cdots+A^{m-1})_{ij}>0$.

(2) 对 $i\neq j$，从 v_i 到 v_j 有半道路的充要条件为

$$[(A+A'-A_D)+(A+A'-A_D)^2+\cdots+(A+A'-A_D)^{m-1}]_{ij}>0.$$

【证】 因为由习题 5.1 第 1 题可知：从 v_i 到 v_j 有定向道路（或半道路）的充要条件为，有初等定向道路（或初等半道路），由定理 1 即得到本推论. ▌

推论 4 定向图 G 的顶点为 $v_1, \cdots, v_m$，结合矩阵为 A，那末

(1) G 强连通的充要条件为

$$I+A+A^2+\cdots+A^{m-1}>0;$$

(2) G 单向连通的充要条件为

$$I+(A+A')+(A^2+A'^2)+\cdots+(A^{m-1}+A'^{m-1})>0;$$

(3) G 弱连通的充要条件为

$$I+(A+A'-A_D)+(A+A'-A_D)^2+\cdots$$
$$+(A+A'-A_D)^{m-1}>0.$$

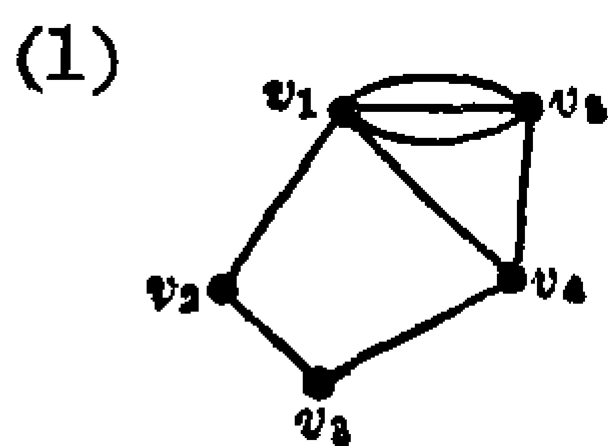
本节要点

在讨论道路的数目时，结合矩阵是一个很有用的工具. 结合矩阵与图形是完全等价的，但结合矩阵与顶点的次序有关.

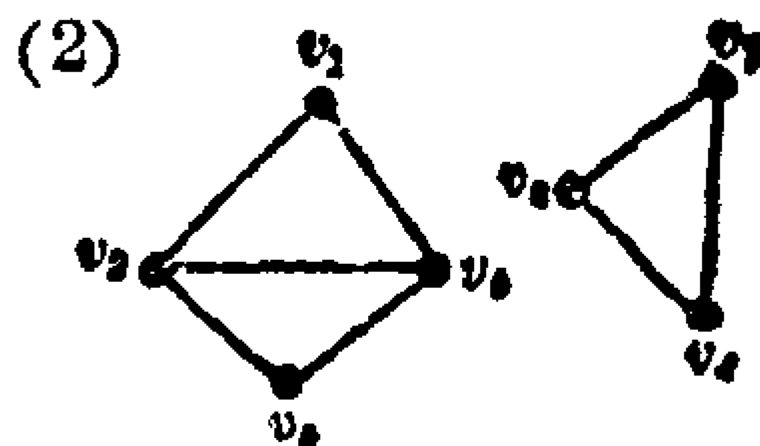
习 题 5·5

1. 求下列各个图的结合矩阵

(1)



(2)

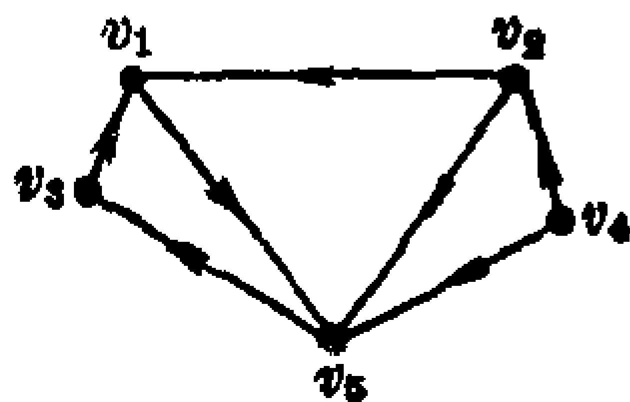


2. 由下列矩阵分别画出以它们为结合矩阵的图:

(1) $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;　(3) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$;　(5) $\begin{pmatrix}0&1&1&0\\2&0&1&2\\2&2&0&1\\1&2&3&0\end{pmatrix}$.

3. 求图中的 A, A^2, A^3.



4. 用数学归纳法完成定理 1 的证明.

第五章小结

本章介绍了有限图的一些基本概念和著名定理，主要讲了：

1．图、路、连通性、生成树等有关概念.

2．图的拓扑形变及贝蒂数、特征数、着色数、连通度等参量.

3．欧拉道路、哈米尔顿道路的存在与否及其找法，最短道路的找法.

4．单向流向平衡图及其环流分解.

5．平面图的概念；欧拉数、欧拉公式及其用于判断图的平面性．图的同胚及著名的平面图准则——库拉托夫斯基定理.

6．图的结合矩阵及其应用于计算道路数.

习 题 答 案

第 一 章

习题1.1 **1**. $H=\{(0,0),(0,1),(0,2)\}$.

2. 不是. **3**. 见图.

4. $\emptyset$, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$, $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$, $\{x, y, z\}$.

6. $A\cup B=\{x\mid (x^4-1)(x^4-3x^2-2)=0\}$
$=\{-i, i, -1, 1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$;

$A\cap B=\{-1, 1\}$; $A-B=\{-i, i\}$; $B-A=\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

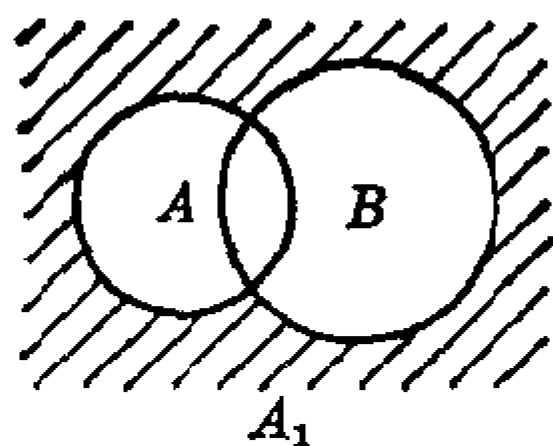
7. $A, \emptyset, A, \emptyset, \emptyset, A\cup B, B, B$.

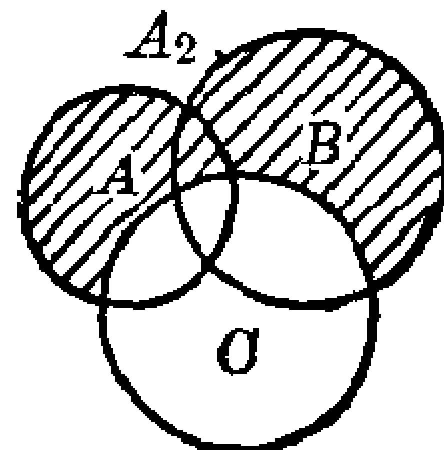
8. (1) $A\subset B$; (2) $B\subset A$; (3) $A=B$; *(4) $A=B=\emptyset$; *(5) $A=B$; *(6) A 任意, $B=\emptyset$.

9. B 是以 A 的一切子集为元素的集合.

习题1.2 **1**. $\emptyset, U, U, \emptyset, U, A, A\cup B, A\cap B$.

4. (1) (2)





5. A. **6**. $\bar{P}\cap Q$: 会飞的雌鸟; $P\cap\bar{Q}$: 不会飞的雄鸟. **7**. $\{2\}$. **8**. (1) ① 金丝雀都会唱歌; ②有些喂养得很好的会唱歌的鸟不是金丝雀. (2) ① $C\cap W=\emptyset$; ② $S\cap\overline{W}\neq\emptyset$; ③ $\overline{W}\subset S$(即 $\bar{S}\subset W$).

9. $(C\cap A)-(C\cap B)$(或 $C\cap(A-B)$). **10**. $\bar{A}_1\cap\cdots\cap\bar{A}_n$; $\bar{A}_1\cup\cdots\cup\bar{A}_n$.

习题1.3 **1**. $A\times B=\{(c, a), (c, b), (b, a), (b, b)\}$;

$B\times A=\{(a, c), (a, b), (b, c), (b, b)\}$;

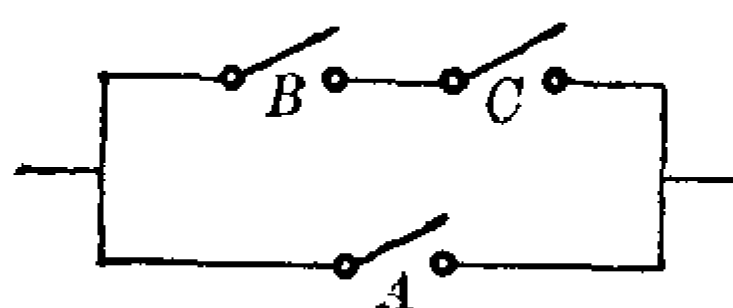
$A\times B\times C=\{(c, a, x), (c, b, x), (b, a, x), (b, b, x), (c, a, y), (c, b, y), (b, a, y), (b, b, y)\}$; $C\times B\times A=\{(x, a, c), (x, a, b),$

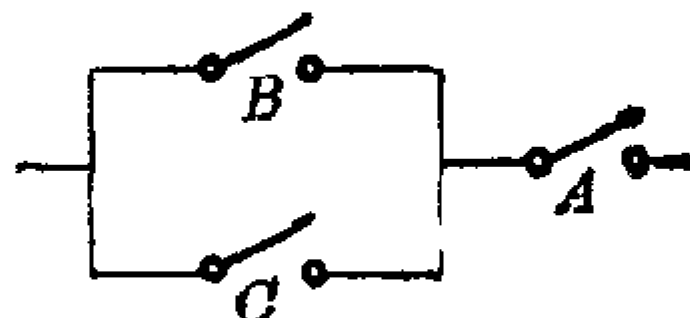
(x, b, c), (x, b, b), (y, a, c), (y, a, b), (y, b, c), $(y, b, b)\}$;
$B\times B=\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$; $A\times A\times B=\{(c, c, a)$, (c, c, b), (c, b, a), (c, b, b), (b, c, a), (b, c, b), (b, b, a), $(b, b, b)\}$.

习题1.4 **1**. 基本事件:红,黄,蓝,白. **2**. 基本事件:(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5). **3**. 基本事件多一倍:(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), …… **5**. 第一分配律:"A 发生且 B 与 C 之一发生"等价于"A 与 B 都发生或 A 与 C 都发生". **7**. (1)$A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$; (2)$A\cap B\cap C$; (3)$A\cap B\cap\overline{C}$; (4) $A\cup B\cup C$; (5) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$; (6) $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$; (7) $(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$; (8) $\overline{A\cap B\cap C}$. **8**. $\emptyset$.

第 二 章

习题2.1 **1**. $A\cup(B\cap C)$(见图) $(B\cup C)\cap A$



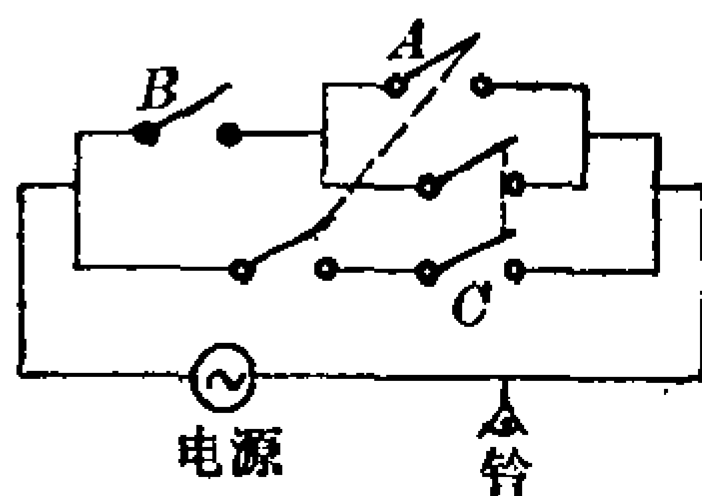


2. $A\cup\overline{A}$; 恒通; $A\cap\overline{A}$; 恒断.

3. 与这个电路相当的开关为

$$(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)=[B\cap(A\cup C)]\cup(C\cap A).$$

其中 A、B、C 分别为分配给这三个人的开关. 电路图如下图所示. 其中 A、C 为双刀两掷开关.

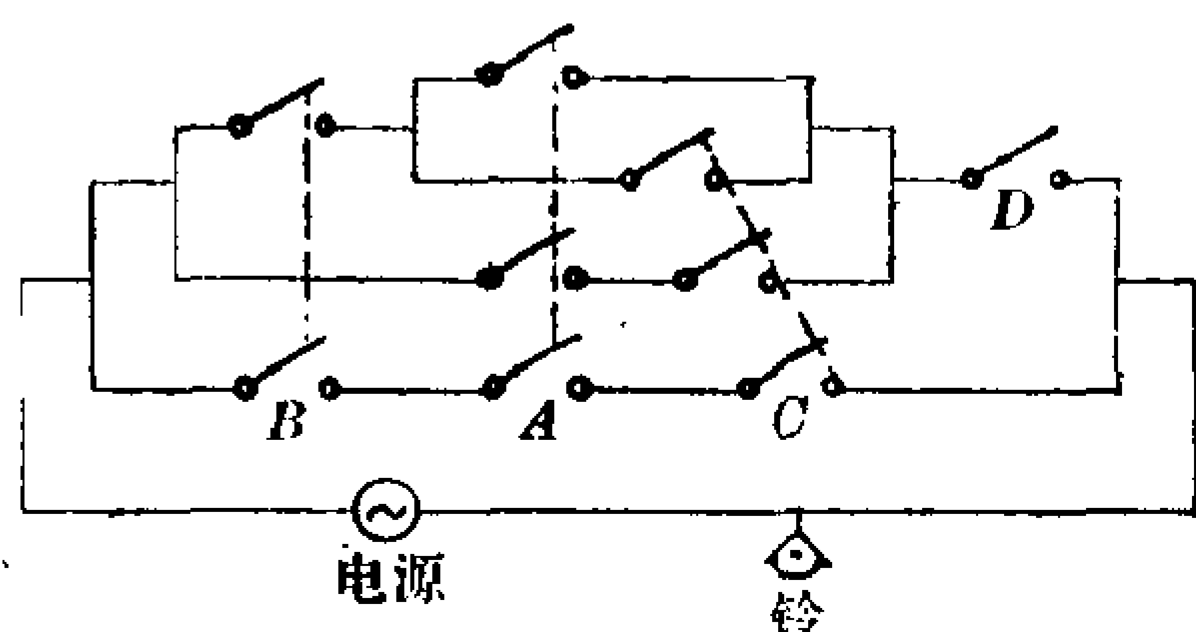


4. 设四个人被分别分配给 A、B、C、D 四个开关,于是要设计的电路相当于开关

$(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap D)\cup(A\cap C\cap D)\cup(B\cap C\cap D)$

$=(A\cap B\cap C)\cup\{[(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)]\cap D\}$.

其电路如图所示.

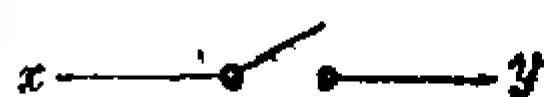


其中 A、C 为三刀两掷开关，B 为双刀两掷开关.

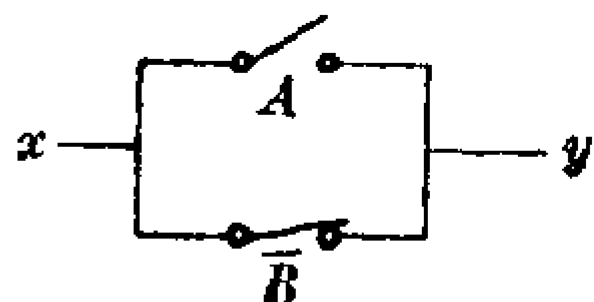
5. (1)



(2)



(3)



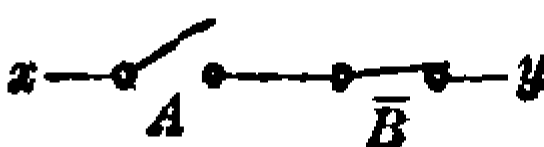
(5)



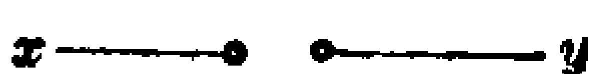
(4)



(6)



(7)



习题 2.2　1. (1)，(2)，(5) 是命题，其它不是. 2. (1) 有人工作不努力；(2)植物都不吃虫；(3)所有的人都不会讲英语；(4)有人不会讲英语. 3. (1)“这个星期日不下雨”及“我们班一起去郊游”总有一件会发生；(2)这个星期日不下雨，我们班一起去郊游；(3)“这个星期日下雨”与“我们班一起去郊游”二者必现其一；(4)“这个星期日下雨或我们一起去郊游”及“这个星期日不下雨或我们不都去郊游”这两件事同时成立，(5) 这个星期日下雨或者我们不都去郊游；(6) 这个星期日下雨，我们不都去郊游；(7) 这个星期日下雨我们仍然一起去郊游；(8)同(3).

4. (1)0; (2)1; (3)$\sim p$; (4)p.

5. (1) 并非又在打雷又在下雨；(2) 要么未在打雷，要么未在下雨（同(1)）；(3)并非既未打雷又未下雨；(4)“要么正在打雷，要么正在下雨”，此话不真；(5)未打雷又未下雨.

6. (1)

p	$\sim\sim p$
0	0
1	1

(2)

p	q	$\sim p \vee \sim q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(3)

p	q	$\sim(p \vee q)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

(4)

p	q	r	$(p \wedge q) \vee r$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(5)

p	q	$(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(6)

p	q	r	$\sim(p \vee \sim r) \wedge (q \vee \sim p)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

(7)

p	q	r	$[\sim p \wedge (\sim q \wedge \sim r)] \vee (p \wedge \sim q)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

8. (1) $p\wedge(q\vee r)$; (2) p; (3) $p\vee\sim q$; (4) **0**; (5) **1**; (6) $\sim q$; (7) $p\wedge\sim q$.

习题 2.3 **1.** (1) 若出太阳，则必温暖；(2) 若人要生活，则必须呼吸；(3) 若在睡觉前喝浓茶，则必然会睡不着. (1) 温暖是出太阳的必要条件；出太阳是温暖的充分条件；(2)呼吸是人生活的必要条件；人生活是呼吸现象的充分条件. (3)睡不着是睡前喝浓茶的必要条件；睡前喝浓茶是睡不着的充分条件. 下面是条件逆、条件否、条件逆否、否命题：(1)温暖时必是出了太阳；太阳未出时不温暖；不温暖时必是未出太阳；并非"出太阳时必温暖". (2) 人呼吸就必是在活着；人不生活就不必呼吸；人不呼吸就不会活着；并非"人生活就必须要呼吸". (3)人睡不着必是睡前喝了浓茶；睡前不喝浓茶不会睡不着；不失眠一定是睡前未喝浓茶；"睡前喝浓茶使人睡不着"不是事实.

2. (1) $\sim[(p\wedge q)\to\sim r]$; (2) $(p\vee q)\wedge\sim r$; (3) $\sim r\leftrightarrow(\sim p\vee\sim q)$.

3. (1)、(3)假；(2)、(4)真(注意(2)，(4)的前题都是假的，所以不管结论如何——(2) 中结论为假，(4) 中结论为真——条件命题都是真的).

4. (1)及(2)

p	q	$p\to q$	$\sim q\to\sim p$	$(p\to q)\wedge(\sim q\to\sim p)$	$(p\to q)\leftrightarrow\sim(p\wedge\sim q)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

(3), (4), (5)

p	q	r	$(p\to\sim q)\wedge r$	$(p\to q)\wedge(q\to r)$	$(p\leftrightarrow q)\wedge(q\leftrightarrow r)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1

5. r 为真. **6**. q 为假. **7**. (1), (2), (3), (4), (7), (8), (9), (12) 是恒真命题; 其余为否. **10**. (1), (2), (3), (4), (6), (7)是; (5)不是. **11**. (2)是; (1), (3) 不是. **12**. (1) $(p\wedge \sim q)\vee r$; (2) $\sim p\vee\sim(q\vee r)\vee s$. **13**. (1) $p\wedge\sim q$; (2) $p\vee q$. **14**. (1) 存在 x, 对一切实函数 f 都有 $f(x)\leqslant 0$. (2)一切正整数 n 均有 $n\geqslant f(n)$. **16**. $p\equiv 0$.

习题 2.4 3. (1) $\sim p$; (2) $\sim s$; (3) r; (4) q. **6**. (1)不正确, 犯了(4.3)中(E_1)类错误; (2)正确. **7**. (1)不正确; (2)正确.

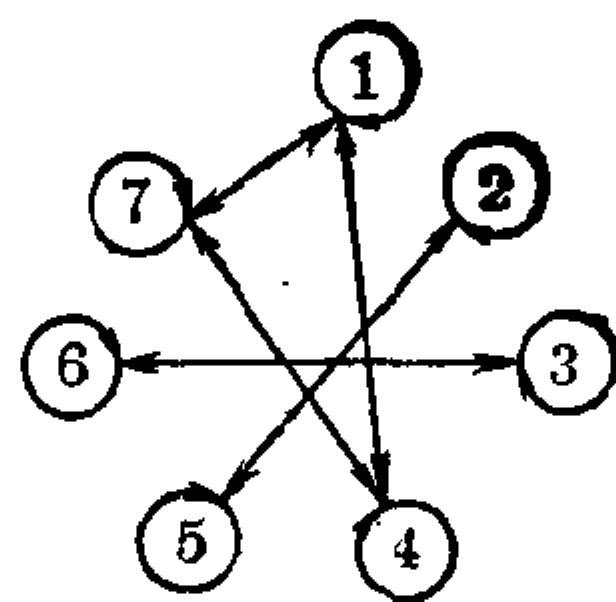
习题 2.5 15. [提示: 在 $n=k+1$ 时, 把棋盘分成 4 块.] **20**. 在 $n=k+1$ 时, 用 B 把 A 上 1 至 k 号片移至 C, 再把 $k+1$ 号移至 B, 再用 A 把 C 上的片移至 B.

习题 2.6 1. (1) $\exists!xP(x)$, 这里 $P(x)=$"x 是偶质数"; (2) $\forall x\exists yF(x, y)$, 这里 x 表火车, y 为汽车, $F(x, y)$ 表示"x 比 y 快"; (3) $\exists y\forall xF(y, x)\wedge\exists x\forall yF(x, y)$(记号同(2)); (4) $E(\text{Cheng}(x, x), 2)\leftrightarrow E(x, \sqrt{2})\vee E(x, -\sqrt{2})$, 这里 $E(x, y)$, 表示"x 等于 y, $\text{Cheng}(x, x)$ 表示"x 乘 x". **2**. $\exists xP(x)\wedge\forall x\forall y(I(x, y)\to\sim P(x)\vee\sim P(y))$, 其中 $I(x, y)$ 表示"$x\neq y$". **5**. $\exists x(P(x)\to Q(x))$. **6**. (1), (4) 正确; (2), (3)不正确. **7**. 逻辑推理正确, 但内容不正确.

第 三 章

习题 3.1 2. 不传递, R_1 可取 $R\cup\{(4, 2), (4, 1), (3, 2)\}$, 也可再并上(1, 1), 所以 R_1 不止一个. **3**. 是; 因为它可分成三个互通的等价类: [1], [2], [3]; 结合矩阵为

$$\begin{vmatrix}1&0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&0&1\end{vmatrix}.$$



5. 否(因为不传递). **6**. 例如, 可令 xRy 当且仅当"$x=y$ 或 $x+y$ 是 3 的奇数倍".

8. $A_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, $A_S=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$,

$A_{R\circ S}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, $A_{S\circ R}=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$,

$A_{R\circ(S\circ R)}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, $A_{R\circ R}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$,

$A_{S\circ S}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, $A_{R^4}=A_{R^2}$.

10. 是. ***11**. 不一定. 例如 X={1至10内的整数}, $\boldsymbol{R}$ 为"≡(mod 3)", $\boldsymbol{S}$ 为"≡(mod5)", 则 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}$ 不对称. 但 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{S}$ 时, $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}$ 是等价关系.
12. 不是等式的例: $\boldsymbol{R}=\{(1,1),(1,2)\}$, $\boldsymbol{S}=\{(1,1)\}$, $T=\{(2,1)\}$.
13. 令 $\boldsymbol{I}=\{(x,x)\mid x\in X\}$ 即可. **14**. $\boldsymbol{R}^{-1}=B\times A$.

习题 **3.2** **2**. (1)是; (2)是. **3**. 令 $f:(x,y)\to(y,x)$即可. **4**. 是.
5. 否, **6**. 是 $X\to X\times X$, 在(1)中 $X=\{1,2,3,4\}$, 在(2)~(4)中 $X=\{1,2,3\}$.

7. f_1: $x_1, x_2, x_3 \xrightarrow{f_1} y_1$;

f_2: $x_1, x_2, x_3 \xrightarrow{f_2} y_2$;

g_1: $x_1, x_2 \xrightarrow{g_1} y_1$, $x_3 \xrightarrow{g_1} y_2$;

g_2: $x_2, x_3 \xrightarrow{g_2} y_1$, $x_1 \xrightarrow{g_1} y_2$;

g_3: $x_3, x_1 \xrightarrow{g_3} y_1$, $x_2 \xrightarrow{g_3} y_2$;

h_1: $x_1 \xrightarrow{h_1} y_1$, $x_2, x_3 \xrightarrow{h_1} y_2$;

h_2: $x_2 \xrightarrow{h_2} y_1$, $x_3, x_1 \xrightarrow{h_2} y_2$;

h_3: $x_3 \xrightarrow{h_3} y_1$, $x_1, x_2 \xrightarrow{h_3} y_2$.

一共八个映射都不是一对一的．除 f_1、f_2 外都是在上的．

9．$(g\circ f)(x, y)=(g_1(f_1(x, y), f_2(x, y)), g_2(f_1(x,y), f_2(x,y)))$;
$(f\circ g)(x, y)=(f_1(g_1(x, y), g_2(x, y)), f_2(g_1(x,y), g_2(x,y)))$.

10．$(g\circ f)(x, y)=(g_1(f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$,
$g_2(f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)))$;
$(f\circ g)(x, y, z)=(f_1(g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)), f_2(g_1(x, y, z)$,
$g_2(x, y, z)), f_3(g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)))$.

习题3.3 **1**．(2)若 $x_0\not\equiv 0(\bmod p)$，则当 p 为质数时，$g(x)\equiv xx_0(\bmod p)$ 一对一在上，否则未必．**2**．不交换也不结合．**3**．都是可交换的、结合的；且彼此之间满足分配律．**4**．$\vee$ 有零元 1，单位元 0，非单位元都无逆元；$\wedge$ 有零元 0，单位元 1，非单位元都无逆元．***5**．$\cup$ 有零元 $\mathcal{U}$，单位元 $\emptyset$，非单位元都无逆元；$\cap$ 有零元 $\emptyset$，单位元 $\mathcal{U}$，非单位元都无逆元．**6**．"$\cdot$"有零元 0，单位元 1，"$\vee$"有零元 1，单位元 0；非单位元都无逆元．**7**．除单位元 0 外只有 2 有逆元，逆元也是 2．

8．$X=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\}$．运算"$\circ$"的单位元是 $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$，无零元，每个元都有逆元．

$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ 的逆元都是它们自己；

$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$.

9. △ 满足交换律与结合律，关于 ∪ 及 ∩ 满足分配律，单位元为 $\emptyset$，无零元，任意一个元素以自己为逆元.

习题 3.4(3) 2. 一阶置换群的元素只有一个：单位元是 e；二阶置换群的元素有两个：单位元是 $e=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$（逆元是本身）；三阶置换群的元素有六个：单位元是 $e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$，其他为 $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$，前 4 个的逆元是本身，后两个互为逆元.

7. 令 $e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$，$e_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$，$e_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$，

$e_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$，$e_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$，$e_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$.

于是

· 右 / 左	e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e	e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e	e_5	e_4	e_3	e_2
e_2	e_2	e_4	e	e_5	e_1	e_3
e_3	e_3	e_5	e_4	e	e_2	e_1
e_4	e_4	e_2	e_3	e_1	e_5	e
e_5	e_5	e_3	e_1	e_2	e	e_4

9. $x\cdot y=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$，$y\cdot x=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$，

$x^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&4&5\end{pmatrix}$，$w^{-1}=w$，

$x\cdot y\cdot z=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&5&2&1\end{pmatrix}$.

方程 $x\cdot\theta=y$ 的解 θ 为

$$\theta=x^{-1}\cdot y=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&5&4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}.$$

12. $(Z_5;\ \oplus_5)$只有一个子群: $(0;\ \oplus_5)$; $(Z_5-\{0\};\ \otimes_5)$有两个子群: $(1;\ \otimes_5)$与$(\{1,\ 4\};\ \otimes_5)$. **17**. $(Z_3;\ \oplus_3)$与$(Z_3-\{0\};\ \otimes_3)$ 的直接积 $(Z_3\times(Z_3-\{0\}),\ \oplus_3\times\otimes_3)$ 有六个元素: (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2). 其运算表为:

$\oplus_3\times\otimes_3$ 右 / 左	(0, 1)	(0, 2)	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
(0, 1)	(0, 1)	(0, 2)	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
(0, 2)	(0, 2)	(0, 1)	(1, 2)	(1, 1)	(2, 2)	(2, 1)
(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)	(0, 1)	(0, 2)
(1, 2)	(1, 2)	(1, 1)	(2, 2)	(2, 1)	(0, 2)	(0, 1)
(2, 1)	(2, 1)	(2, 2)	(0, 1)	(0, 2)	(1, 1)	(1, 2)
(2, 2)	(2, 2)	(2, 1)	(0, 2)	(0, 1)	(1, 2)	(1, 1)

第 四 章

习题 **4.1** **2**. C_{m+k+1}^{m+1}. **4**. $C_{4n}^{n}C_{3n}^{n}C_{2n}^{n}/4!$. **5**. (1)$C_6^2=15$; (2)$C_6^2-C_5^1=C_5^2=10$.

6. (1): ① C_{n-2m+2}^{2}; ② $C_{n-2m+2}^{2}-C_{n-2m+1}^{1}=C_{n-2m+1}^{2}$; (2)的情况相应地把(1)乘以 2 倍. **7**. $\sum_{k=5}^{45}C_{k-1}^{4}C_{100-k}^{5}$. **8**. $D_3^4=C_6^3$ 种. **9**. C_{n+m-1}^{m-1}("$m-1$"个"隔板"). **10**. (1)$C_{(r-2n)+n-1}^{n-1}$; (2)$C_{r+(n-1)-1}^{n-2}$(或 C_{r+n-2}^{r}).

11. $C_{n+k_1-1}^{k_1}C_{n+k_2-1}^{k_2}\cdots C_{n+k_r-1}^{k_r}$. **12**. $C_5^2C_{22}^{5,5,4,4,4}$.

13. $C_{2n}^{2,2,\cdots,2}/n!=\dfrac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$. **14**. (1)$\dfrac{8\cdot8\cdot7\cdot7}{2}$; (2)$(C_8^2)^2$.

15. $D_m^n=C_{m+n-1}^{n}$.

习题 **4.2** **1**. 不矛盾. **2**. 22%. **3**. 最大可取 18, 最小可取 11.

4. (1) 11; (2) 24; (3) 8. 5. 4人. 6. (1) 3; (2) 18. 7. $200 \leqslant n(c) \leqslant 700$. 8. $(x, y, z) = (2, 1, 4)$.

习题4.3 1. 球不同时为 R_n^{m-r}; 球相同时为 $C_{n+(m-r)-1}^{n}$.

3. $C_{n+m-2}^{m-1} = C_{n+m-3}^{m-2} + C_{n+m-4}^{m-2} + \cdots + C_{m-2}^{m-2}$. 4. 分别为

$C_r^{r_1} \sum\limits_{k=r-r_1}^{n} C_n^k A(k, r-r_1)(m-r)^{n-k}$; $C_r^{r_1} C_{n-r+m-1}^{m-1}$; $C_r^{r_1} C_{m-r}^{n-(r-r_1)}$.

习题4.4 1. $\dfrac{n^2+n+2}{2}$. *5. (1) $\dfrac{n}{n-m} C_{n-m}^{m}$; (2) C_{n-m+1}^{m}. 7. 一型变换为 $b_m = \sum\limits_{k=0}^{m} L(m, k) a_k$; 逆转公式为 $a_m = \sum\limits_{k=0}^{m} L(m, k) b_k$; 二型变换为 $b_m = \sum\limits_{k=m}^{n} L(k, m) a_k$; 逆转公式为 $a_m = \sum\limits_{k=m}^{n} L(k, m) b_k$.

9. (1) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; (2) $\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

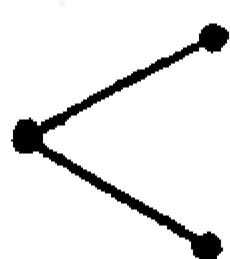
(3) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$. 11. $s(n, m)$.

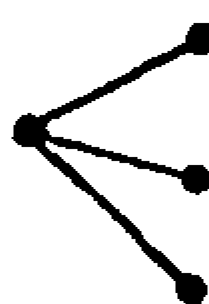
习题4.5 5. 用一般的瑞姆赛定理: $r=20$, $m=10$, $q_1 = \cdots = q_m = 30$.

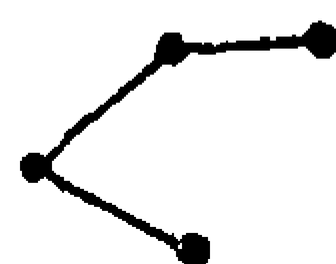
第 五 章

习题5.1 3. $v=2$ $v=3$ $v=4$

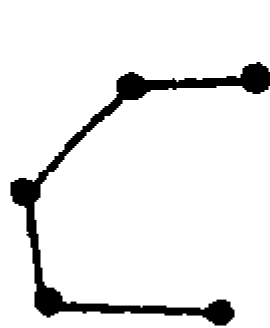


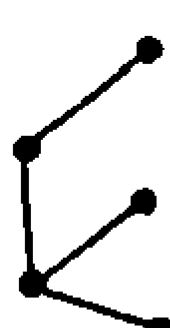


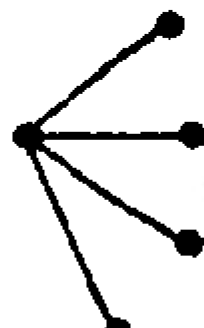




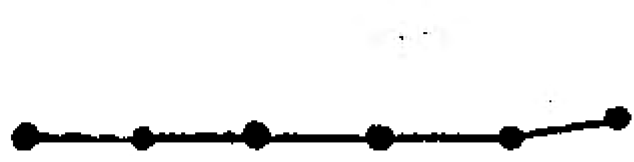
$v=5$





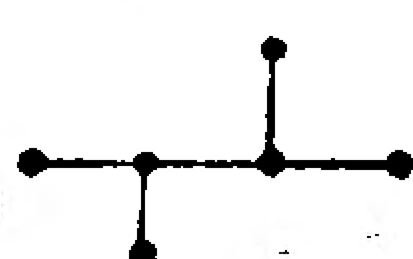


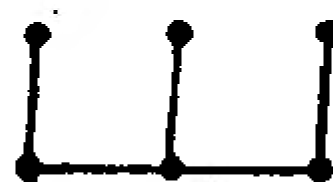
$v=6$

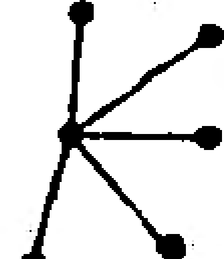




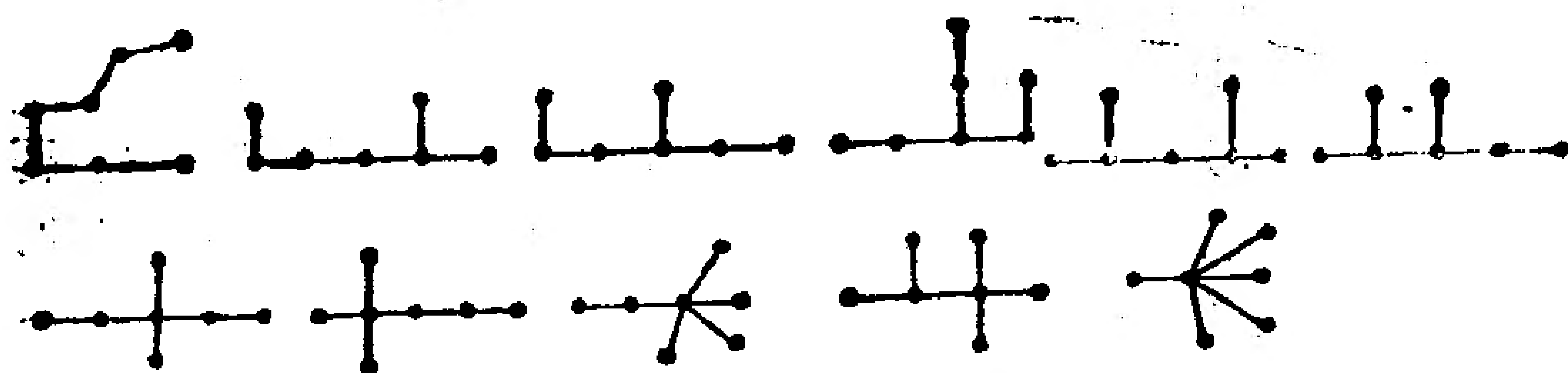




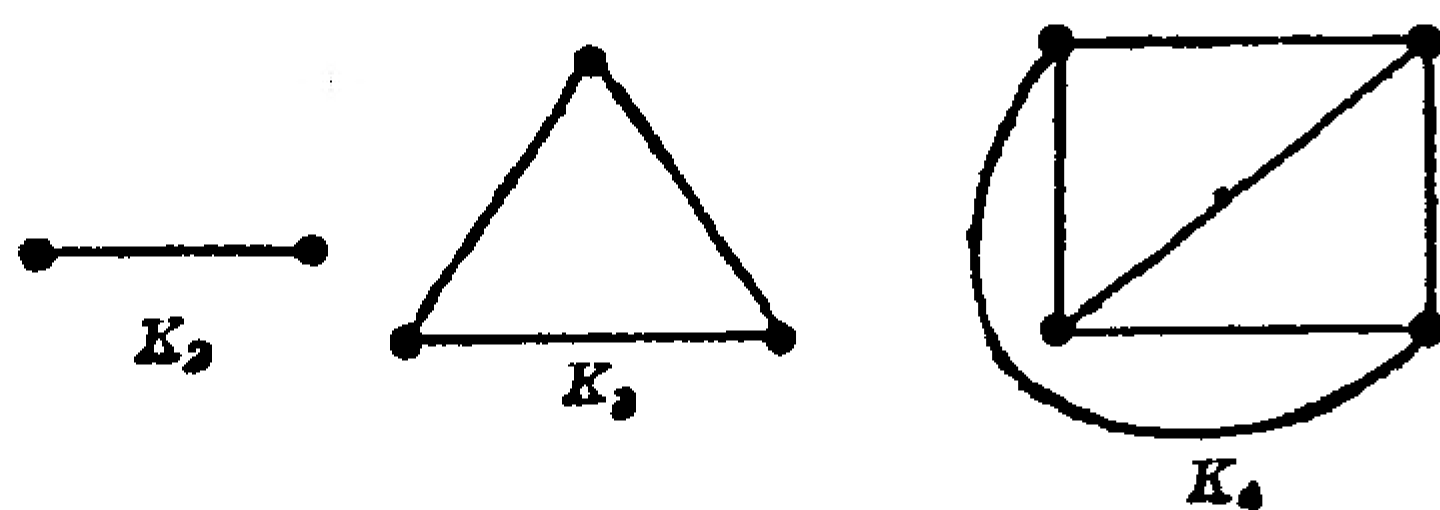


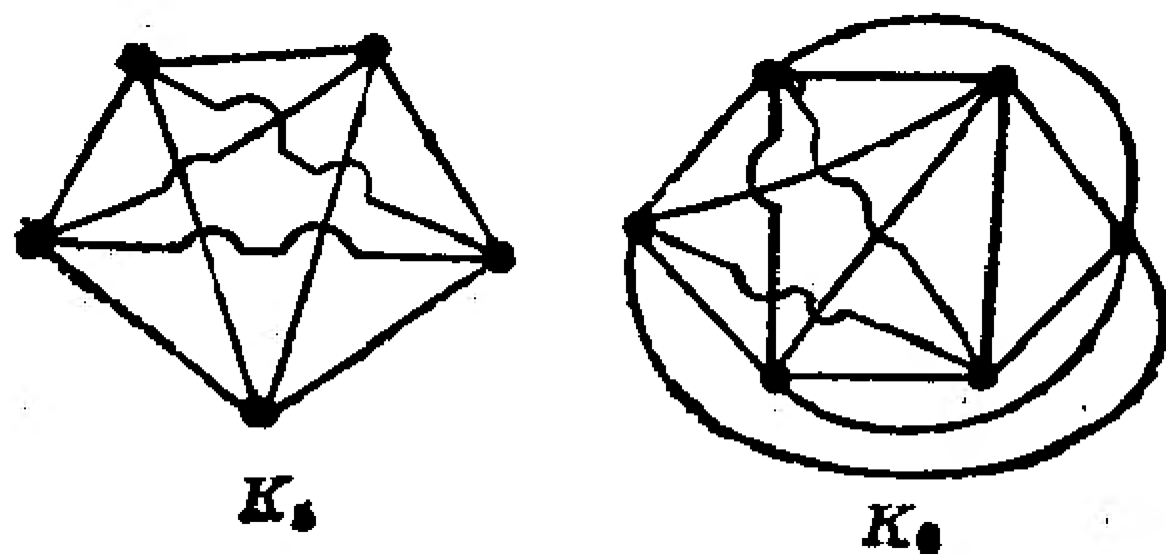


4 只有11种，如图所示.

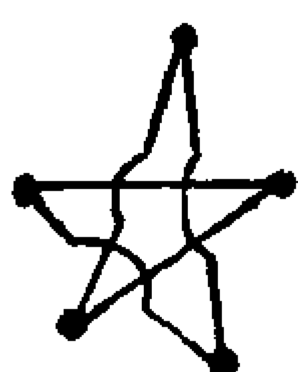


6. "="时未必成立. 8. K_n 边数为 C_n^2; K_2、K_3、K_4、K_5、K_6 如图所示.

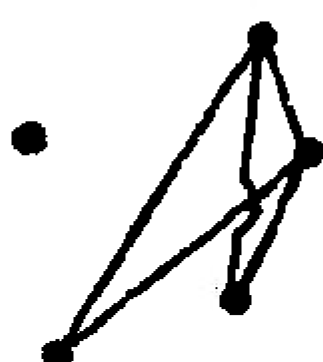




9. (1)



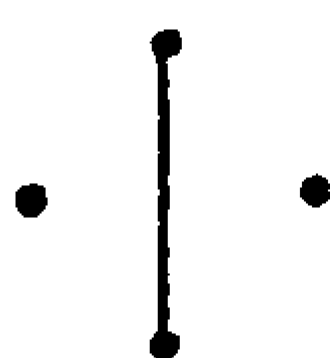
(2)



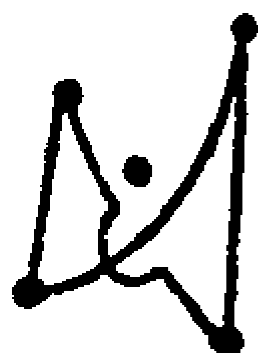
(3)



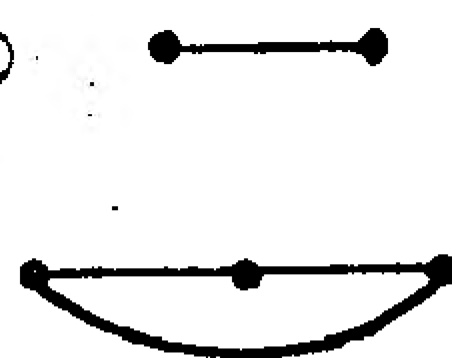
(4)



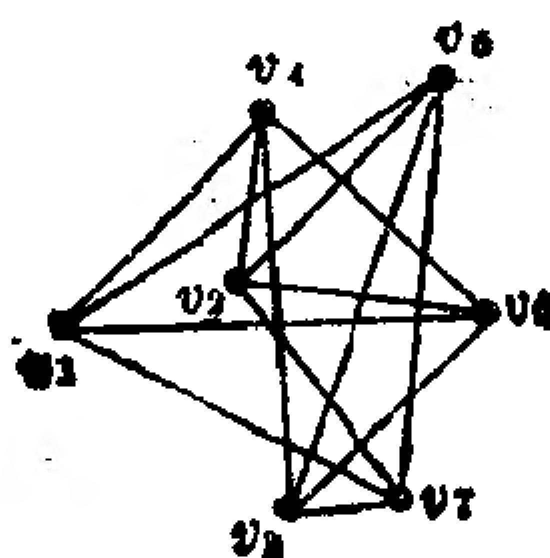
(5)



(6)



(7) n 个点，无边.　　(8)

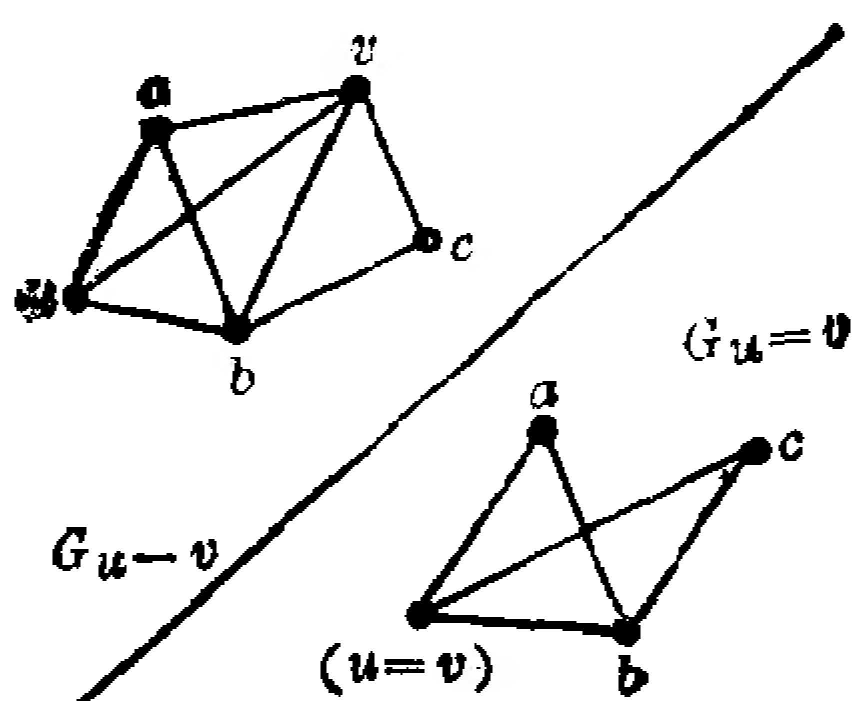


11. 不能. **12**. $m-p$.

习题 5.2(1) **1**. $\chi(G)=0$; $R=1$. **2**. 1; 0. **3**. k; 0. **4**. (1) -7; 8; (2) -2; 3; (3) -4; 5; (4) -8; 9.

习题 5.2(2) **1**. 只有顶点没有边的图. **2**. 当顶点个数为偶时为 2, 否则为 3. **3**. 均为 2. **4**. 立方体为 2; 正四面体为 4, 正八面体为 3. **5**. $\gamma(K_n)=n$. **6**. 2; 3; 4; 3.

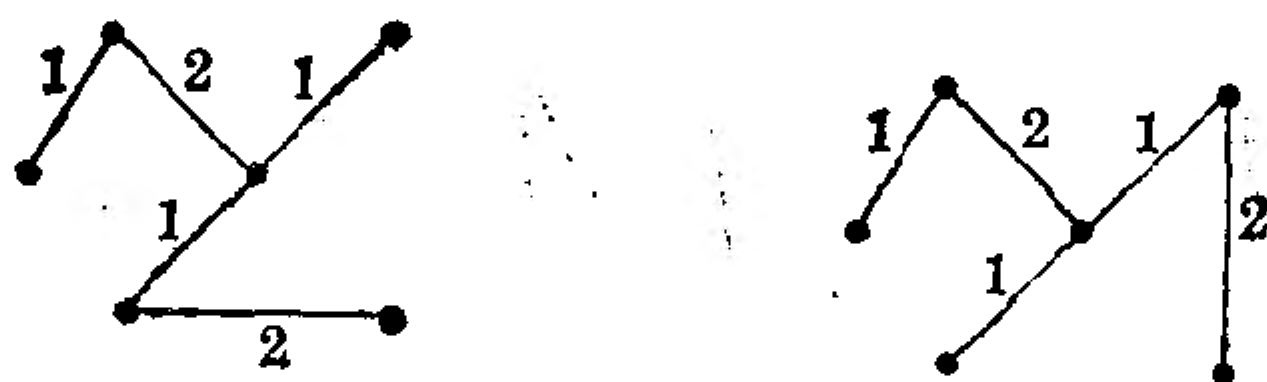
7. $\gamma(G)=3$.



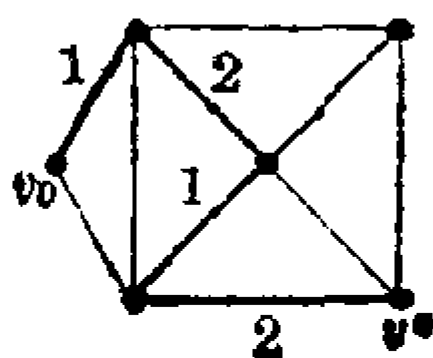
习题 5.3(1) **1**. (1), (2), (6), (14) 有欧拉环路; (4), (10), (11) 有欧拉道路; 其它均没有. **2**. n 为奇数时, 有欧拉环路; n 为偶数时, 只当 $n=2$ 时有欧拉道路.

习题 5.3(2) **1**. (2), (3), (4), (6) 有哈米尔顿环路; (5) 有哈米尔顿道路; (1) 二者都无. **3**. 树有哈米尔顿道路当且只当一切顶点的结合度都不超过 2.

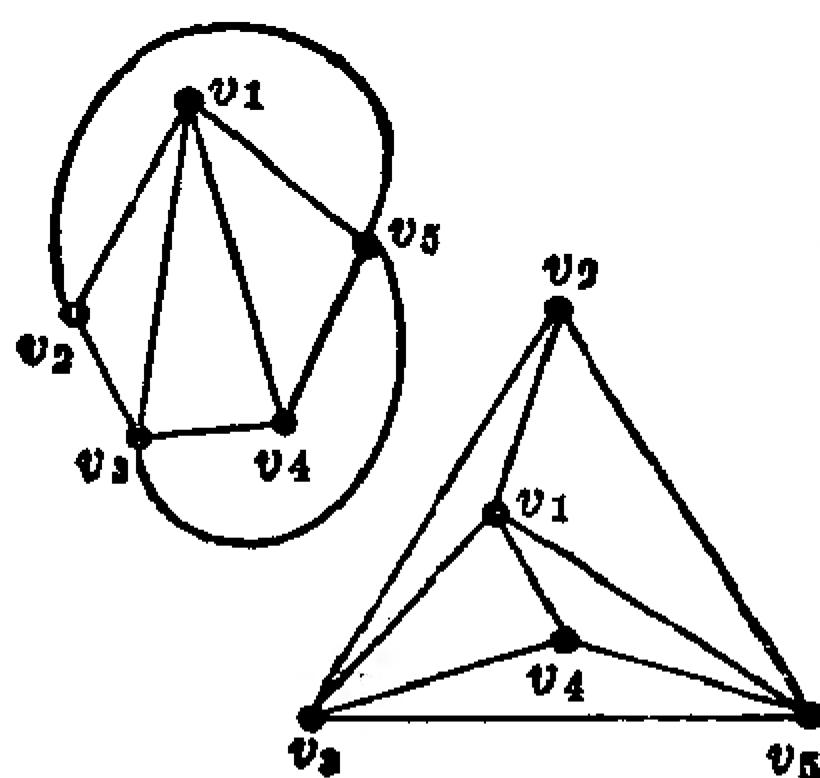
习题 5.3(3) **2**. (1) 最小价格生成树有两个, 价格都是 7;



(2) v_0 到 v^* 的最经济道路有两条, 下图画出了其中的一条.

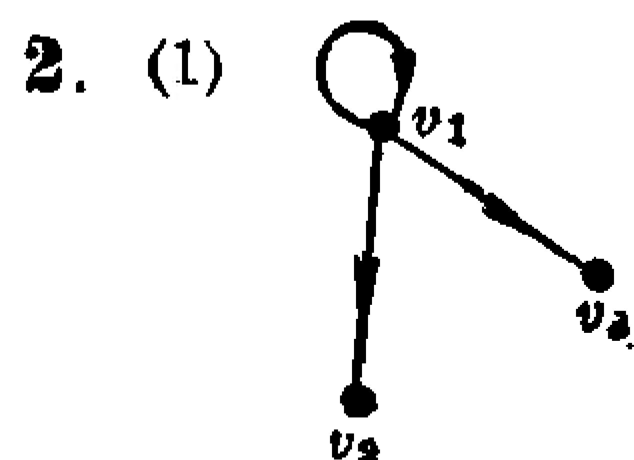


习题 5.4　9.

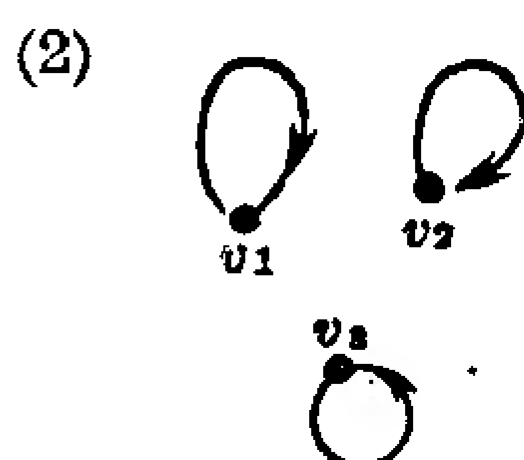


习题 5.5　1. (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

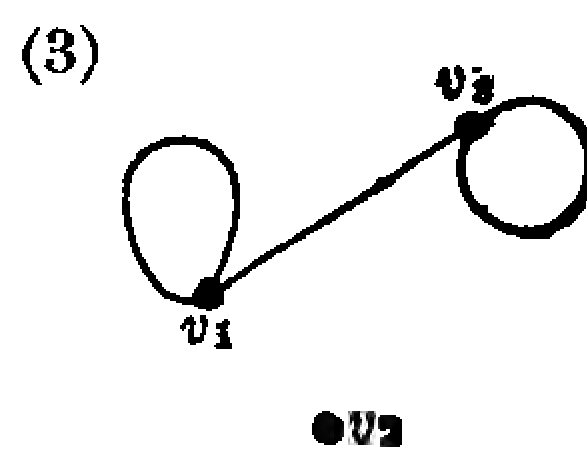
2. (1)



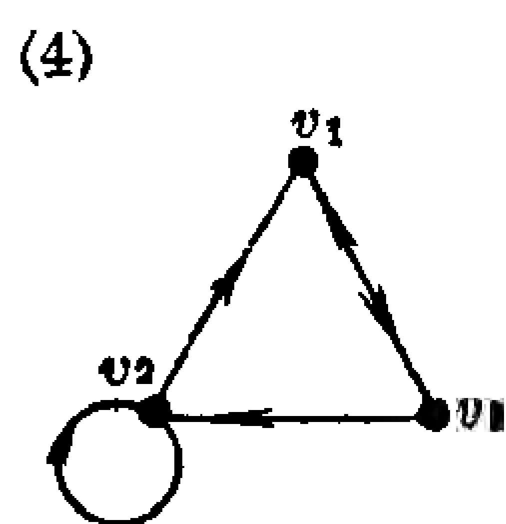
(2)



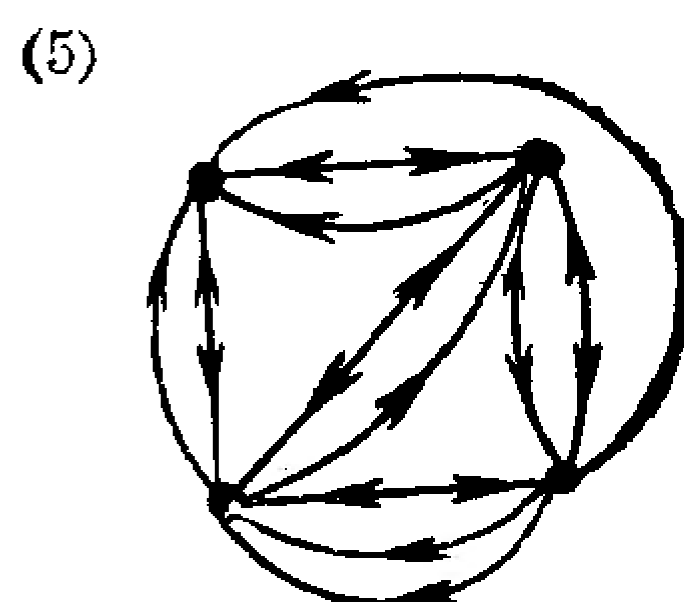
(3)



(4)



(5)



3.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$